LIMITATE CATENE DEDUTTIVE

Quesito 4 PNI-Suppletiva 2007

Si consideri la seguente proposizione:

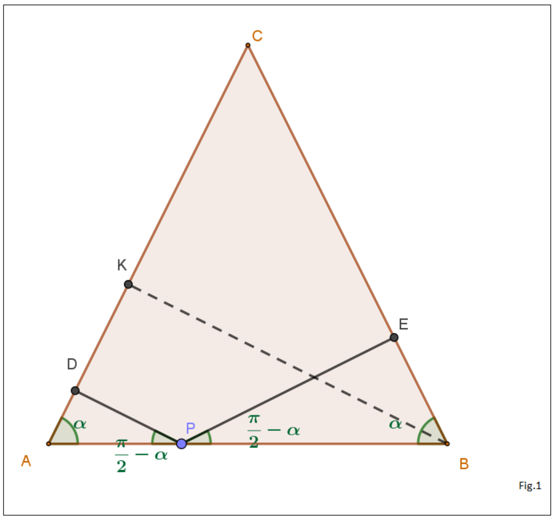
"In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante"

Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

SOLUZIONE

La proposizione è vera : la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante ed è uguale alla misura dell'altezza relativa ad uno dei due lati.

Si costruisce la figura considerando un triangolo ABC acutangolo ma si può verificare che tutte le considerazioni valgono anche nel caso in cui l'angolo di vertice A sia retto oppure ottuso



DIMOSTRAZIONE – con riferimento alla figura 1

1) **Ambito trigonometrico**

Prerequisiti:

Definizione della funzione "seno" di un angolo

Risoluzione dei triangoli rettangoli

Essendo

$\overline{PD} = \overline{PA} \sin \alpha \qquad \overline{PE} = \overline{PB} \sin \alpha$

Si ottiene

$\overline{PD} + \overline{PE} = (\overline{PA} + \overline{PB})\sin\alpha = \overline{AB}\sin\alpha = \overline{BK}$

2) Ambito geometrico

a) Prerequisiti:

Triangoli rettangoli

Triangoli simili e rapporto di similitudine

Sfruttando la similitudine dei triangoli rettangoli APD, BPE, ABK e indicando con k il rapporto tra il cateto opposto all'angolo α e l'ipotenusa (in ciascuno dei tre triangoli) scriveremo

$\overline{PD} = k \cdot \overline{PA}$ $\qquad \overline{PE} = k \cdot \overline{PB}$

Da cui e

$\overline{PD} + \overline{PE} = k(\overline{PA} + \overline{PB}) = k \cdot \overline{AB} = \overline{BK}$

b) Prerequisiti:

Equivalenza tra figure piane

Area del triangolo

Il segmento PC divide il triangolo ABC nei due triangoli APC e BPC di area $\frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{PD}$ e $\frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{PE}$ rispettivamente

Pertanto

$\frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{PD} + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{PE} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BK} \rightarrow \frac{1}{2}\overline{AC}(\overline{PD} + \overline{PE}) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BK} \rightarrow \overline{PD} + \overline{PE} = \overline{BK}$

c)Metodo sintetico

Prerequisiti:

Triangoli rettangoli

Primo criterio di congruenza dei triangoli

Prolungando DP di un segmento PF congruente a PE congiungendo B con F, si osserva che i due triangoli EPB e FBP sono tra loro congruenti in quanto hanno
PB in comune
PE congruente a PF
L'angolo compreso di uguale ampiezza
Possiamo pertanto affermare che l'angolo $P\hat{F}B$ è retto e, di conseguenza, il quadrilatero $DFBK$ è un rettangolo,
Resta, pertanto, dimostrato che

$$\overline{PD} + \overline{PE} = \overline{DF} = \overline{BK}$$

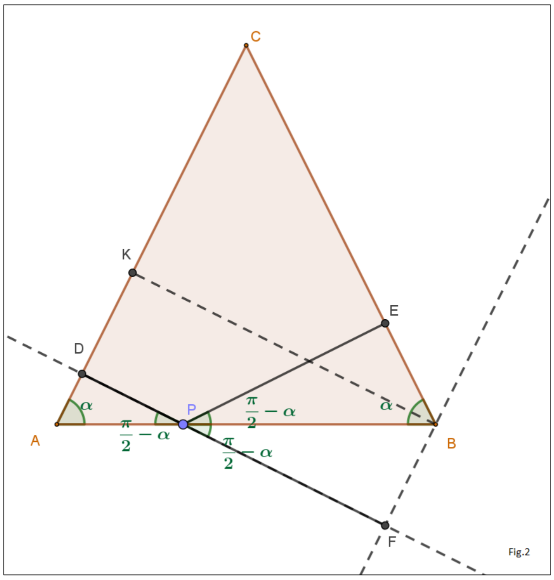
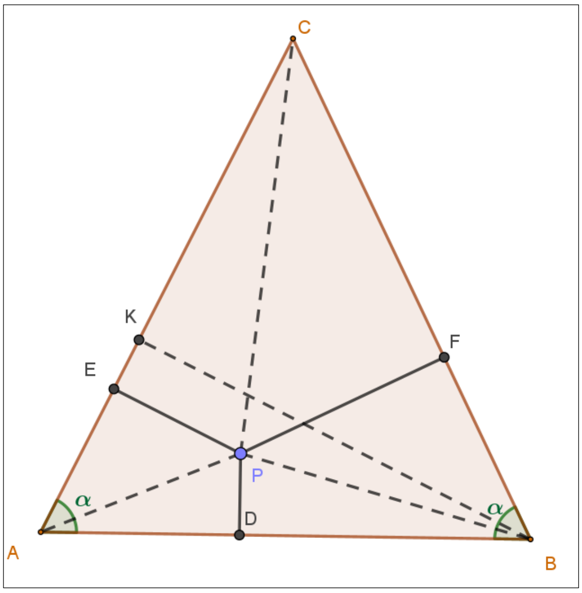


Fig.2

Confronto con il Teorema di Viviani

Nel caso particolare in cui il triangolo ABC sia equilatero, la proposizione in oggetto diventa un corollario del teorema di Viviani , il quale afferma : ***Dato un punto interno o appartenente a un lato di un triangolo equilatero, la somma delle sue distanze dai tre lati è uguale all'altezza del triangolo***

Se si generalizza il teorema di Viviani a un triangolo isoscele, ritroviamo ancora, come corollario, la nostra proposizione .



Indicata con S l'area del triangolo, possiamo scrivere

$$S = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{PD} + \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{PE} + \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{PF} \rightarrow \; 1 = \frac{1}{2S}\,\overline{AB}\cdot\overline{PD} + \frac{1}{2S}\overline{AC}\cdot\overline{PE} + \frac{1}{2S}\overline{BC}\cdot\overline{PF}$$

e, indicando con CH l'altezza relativa ad AB

$$1 = \frac{\overline{PD}}{\overline{CH}} + \frac{\overline{PE}}{\overline{PK}} + \frac{\overline{PF}}{\overline{PK}}$$

Se P appartiene alla base AB, la relazione precedente si riduce a

$1 = \frac{\overline{PE}}{\overline{PK}} + \frac{\overline{PF}}{\overline{PK}}$ ovvero $\overline{PE} + \overline{PF} = \overline{PK}$