1) **La dialettica continuo-discreto nei modelli e nel pensiero matematico Algoritmi o integrali?**

Quesito 9 PNI 2006 Della funzione f (x) si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare f (x)?

E' evidente che la funzione $f(x) = e^x$ soddisfa le condizioni assegnate.

La soluzione è unica se la funzione è definita in $\mathbb{R}$ o comunque in un intervallo,. Se la funzione è definita nell'unione di due intervalli aperti può ammettere infinite soluzioni . Es $f(x) = \begin{cases} e^x & x > -1 \\ ke^x & x < -1 \end{cases}$

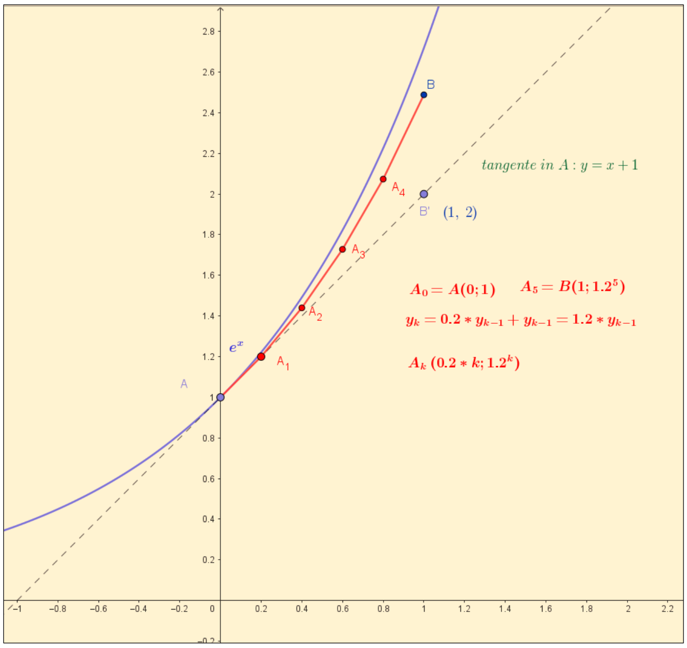
La richiesta può essere, comunque, formulata come un problema di Cauchy che ammette, pertanto, una sola soluzione (nell'intervallo massimale contenente lo 0, in cui la funzione è continua).

Poichè la traccia non fa alcun riferimento alle equazioni differenziali, proviamo a dare una risposta sfruttando solo il concetto di derivata e di differenziale.

Fissiamo un intervallo $I\,[0, T]$ che possiamo prendere unitario .

Le informazioni $f'x) = f(x)$ e $f(0) = 1 \rightarrow f'(0) = 1$ permettono di scrivere l'equazione della retta t tangente a f nel punto $A_0(0; 1)$: $y = x + 1$

La funzione f può essere approssimata, in un intorno sufficientemente piccolo di A_0, , dal suo differenziale. $f(0) + f'(0)\,dx = 1 + dx$



Suddiviso l'intervallo I in n parti uguali, si può determinare un secondo punto, appartenente alla retta t, di coordinate $A_1\left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

Il procedimento può essere iterato n volte, imponendo che in ogni punto il coefficiente angolare della tangente sia uguale all'ordinata del punto stesso.

Si determinano , pertanto , $n + 1$ vertici di una spezzata $A_k\left(\frac{k}{n}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k\right)$, in cui le ascisse crescono in progressione aritmetica di ragione $\frac{1}{n}$ e le ordinate in progressione geometrica di ragione $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, in accordo con la proprietà degli incrementi.

Al crescere di n, si approssima sempre meglio il grafico della curva da determinare e , poiché, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ *, la spezzata tende identificarsi con l'arco di curva esponenziale* e^x *di estremi* $A(0,1)$ *e* $B(1,e)$

L'algoritmo utilizzato rispecchia quello di uno dei più noti metodi numerici per l'approssimazione della soluzioni di un'equazione differenziale: **il metodo di Eulero**.

Non tutte le equazioni differenziali, infatti, ammettono una soluzione simbolica e spesso occorre lavorare in ambiente discreto con algoritmi e sussidi digitali.

Costruzione della spezzata con il sussidio del foglio elettronico

Applicazione dell'algoritmo di Eulero $f_{n+1} = f_n + f'_n dx$ f_0=1 $dx = 0{,}2$

nell'intervallo $[0{,}4]$

dx	x	f(x)	f'(x)=kf(x)
0,2	0	1	1
	0,2	1,20	1,20
k	0,4	1,44	1,44
1	0,6	1,73	1,73
	0,8	2,07	2,07
	1	2,49	2,49
	1,2	2,99	2,99
	1,4	3,58	3,58
	1,6	4,30	4,30
	1,8	5,16	5,16
	2	6,19	6,19
	2,2	7,43	7,43
	2,4	8,92	8,92
	2,6	10,70	10,70
	2,8	12,84	12,84
	3	15,41	15,41
	3,2	18,49	18,49
	3,4	22,19	22,19
	3,6	26,62	26,62
	3,8	31,95	31,95
	4	38,34	38,34