1) Confronto tra una funzione esponenziale e una funzione potenza a esponente irrazionale

Quesito 8 ordinaria 2008 Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$ Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

Il quesito non richiede lo studio della funzione $f(x)$ (in verità poco agevole) ma solo il dominio e il segno delle derivate prima e seconda, calcolate in π.

Trascuriamo quest'ultima questione che richiede solo abilità nei calcoli e cogliamo alcuni spunti di approfondimento suggeriti dal confronto tra le funzioni π^x e x^π

La particolarità dello "scambio" tra base ed esponente suscita una certa curiosità

Si può assegnare il valore $x = 0$? Quanti sono i valori di x *tali che* $\pi^x = x^\pi$*? E' maggiore* π^e *oppure* e^π*?*

Per rispondere a queste domande si propone un'attività (una possibile Limitata Catena Deduttiva) che richiama alcune importanti proprietà delle funzioni in generale e, in particolare, quelle della funzione esponenziale , della funzione logaritmica e della potenza a esponente irrazionale. E' previsto l'uso di calcolatrici o altri sussidi informatici ma solo come supporto per i calcoli o per il controllo dei risultati.

Dominio

La funzione è somma di una funzione esponenziale di base π , definita in $\mathbb{R}$, e una potenza con esponente irrazionale positivo , la cui base non può essere negativa.

Non tutti i solutori, però, sono stati concordi se accettare, o no, lo 0 come valore appartenente al dominio. In effetti la scelta è condizionata dal modo in cui sia stata definita la potenza a esponente reale o anche dalla preferenza per definizioni restrittive o di tipo inclusivo.

Il testo è stato oggetto di dibattito e anche di critica sull'opportunità di proporre in sede d'esame una questione non esente da ambiguità.

Fermo restante che una prova d'esame va valutata non solo sulla risposta fornita dal candidato ma anche sulle motivazioni apportate, il quesito ha una sua valenza didattica e suggerisce una discussione o un'attività da proporre agli studenti.

Partendo proprio dalla richiesta specifica :<<Lo 0 appartiene o no al dominio?>>,si possono prendere in considerazioni le risposte seguenti

a) No, poiché la funzione potenza con esponente reale ammette come dominio l'insieme dei reali positivi

b) Sì, poiché, essendo l'esponente irrazionale ma comunque positivo, la potenza x^{π} è definita anche per x=0 ed ha valore 0
c) La funzione x^{π} equivale a $e^{\pi \ln x}$, pertanto, non è definita in 0
d) La funzione x^{π} equivale a $e^{\pi \ln x}$, pertanto, non è definita in 0 ma è prolungabile in 0 in modo continuo
e) La funzione x^{π} può essere definita in 0 ma non avviene altrettanto per tutte le sue derivate successive; pertanto, si preferisce definire la potenza a esponente reale sempre nell'insieme dei reali positivi.
(Osservare che la derivata del quarto ordine assume la forma $\pi(\pi-1)(\pi-2)(\pi-3)x^{\pi-4}$,in cui compare una potenza con esponente negativo.)

La discussione sulle risposte fornisce l'occasione per sondare le mappe concettuali che lo studente si è costruito riguardo la problematica dei numeri reali, sui concetti di prolungamento della funzione potenza e di continuità.

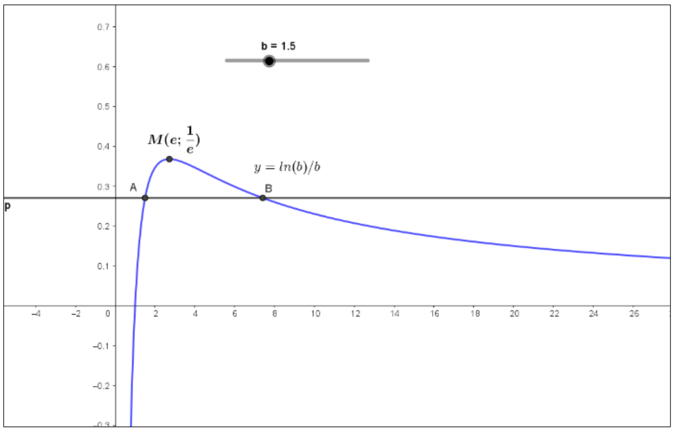
Ricerca degli zeri

Volendo studiare gli eventuali zeri della funzione $f(x) = \pi^x - x^{\pi}$ dobbiamo essere in grado confrontare le funzioni rappresentate dai due addendi.

L'equazione $\pi^x - x^{\pi} = 0$ è , per $x > 0$, equivalente a

$$x \ln \pi = \pi \ \ln x \rightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln \pi}{\pi}$$

Una soluzione è palesemente x=π.



Per verificare se esistono altre soluzioni ,studiamo l'andamento della funzione $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ che è continua e derivabile nell'intervallo x>0.

La curva appartiene $al\ semipiano\ x > 0$. La sua monotonia può essere studiata facilmente attraverso lo studio del segno della derivata $g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

Acquisite tutte le informazioni necessarie , in particolare: l'esistenza del massimo assoluto nel punto $M\left(e, \frac{1}{e}\right)$, il passaggio per il punto (1,0) e la presenza degli asintoti $y = 0 \ e \ x = 0$, si perviene al grafico rappresentato in figura.

Poiché risulta $\frac{\ln b}{b} < \frac{1}{e} \ \forall b > 0$, ogni retta di equazione $y = \frac{\ln b}{b}$ incontra il grafico almeno in un punto.

Precisamente : esiste una sola intersezione se $0 < b \leq 1$, esistono due soluzioni, di cui una uguale a b, se $b > 1$.

Delle due soluzioni , una è minore di e, l'altra maggiore. Le soluzioni sono coincidenti se $b = e$.

Poiché $\pi > e$, l'equazione $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln \pi}{\pi}$ ammette due soluzioni : $1 < x_1 < e$

e $x_2 = \pi > e$

Della soluzione minore si può determinare un valore approssimato utilizzando uno dei metodi numerici più noti, ad esempio il metodo di bisezione (applicazione del teorema d'esistenza degli zeri ,importante proprietà delle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato), E' opportuno l'uso del foglio elettronico, ma può essere sufficiente una calcolatrice.

	b	f(a)	f(b)	f(a)*f(b)	xmedio	f(xmedio)	b-a	b-a≤0,001
1	2,718	2,142	-0,682	5,821	1,859	1,384	1,718	no
1,859	2,718	1,384	-0,682	3,763	2,289	0,255	0,859	no
2,289	2,718	0,255	-0,682	0,694	2,503	-0,304	0,430	no
2,289	2,503	0,255	-0,304	0,639	2,396	-0,037	0,215	no
2,289	2,396	0,255	-0,037	0,611	2,342	0,107	0,107	no
2,342	2,396	0,107	-0,037	0,257	2,369	0,035	0,054	no
2,369	2,396	0,035	-0,037	0,083	2,383	-0,001	0,027	no
2,369	2,383	0,035	-0,001	0,082	2,376	0,017	0,013	no
2,376	2,383	0,017	-0,001	0,039	2,379	0,008	0,007	no
2,379	2,383	0,008	-0,001	0,018	2,381	0,003	0,003	no
2,381	2,383	0,003	-0,001	0,007	2,382	0,001	0,002	no
2,382	2,383	0,001	-0,001	0,002	**2,382**	0,000	0,001	**sì**

Utilizzando alcuni dei risultati precedenti possiamo rispondere all'ultima domanda
E' maggiore π^e oppure e^π?

Dalla disuguaglianza $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$ si deduce che

$$e \ln \pi < \pi \cdot \ln e \rightarrow \ln \pi^e < \ln e^\pi$$

Poichè la funzione $\ln x$ è monotona crescente , si deduce che $\boldsymbol{\pi^e < e^\pi}$