L’energia potenziale gravitazionale

Si dice che una forza applicata ad un punto materiale P compie un “lavoro” quando P si muove, ossia quando si sposta il punto di applicazione della forza stessa. Se $\vec{F}$ è questa forza e $\vec{ds}$ lo spostamento elementare del punto P, si definisce “lavoro elementare” della forza $\vec{F}$ il prodotto scalare

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds} \qquad (20)$$

o anche, indicando con θ l’angolo fra $\vec{F}$ e $\vec{ds}$,

$$dW = F \cdot ds \cdot cos\theta \qquad (21)$$

Per uno spostamento finito P_1P_2 di P, si ha:

$$W_{P_1}^{P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot \vec{ds} \qquad (22)$$

Nel S.I., l’unità di misura del lavoro è il “joule” [J] .

***

L’energia è la capacità di compiere lavoro.
Un corpo di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$ possiede un’”energia cinetica”

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (23)$$

Il lavoro necessario per spostare un oggetto da una posizione a un’altra dipende dal percorso seguito. Vi sono però molti casi in cui non è così: casi, cioè, nei quali il lavoro compiuto dalla forza dipende solo dalle posizioni P_1 e P_2 ed è indipendente dalla traiettoria seguita: in simboli

$$W_{P_1}^{P_2} = V(P_1) - V(P_2). \qquad (24)$$

La funzione V(P) è l’”energia potenziale” spettante al punto materiale in ragione della sua posizione P. Una forza la quale sia caratterizzata da tale proprietà è detta “forza conservativa”. Tutte le forze “centrali” (forza gravitazionale, forza elettrostatica) sono conservative.
In prossimità della superficie della Terra, dove si può considerare che la forza gravitazionale sia costante, per sollevare un oggetto di massa m fino a un’altezza h occorre una quantità di lavoro $W = mgh$, qualunque sia il percorso seguito. Dopo essere stato sollevato, l’oggetto possiede un’”energia potenziale gravitazionale”

$$V = mgh \qquad (25)$$

Se si considerano distanze non più trascurabili rispetto al raggio della Terra, si deve tenere conto del fatto che la forza gravitazionale varia come l'inverso del quadrato della distanza dal centro della Terra

$$\vec{F}_{grav} = -\, G\frac{M_T m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad (26)$$

Calcoliamo ora qual è il lavoro fatto dalla forza gravitazionale per portare un oggetto di massa m da un punto P_1 distante R dal centro della Terra, a un punto P' distante R' con $R < R'$. In base alla (22), dato che $\vec{r} \cdot \vec{ds} = r\, dr$, avremo:

$$W_p^{p'} = -\, GM_T m \int_R^{R'} \frac{dr}{r^2} = GM_T m(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}).$$

Quando $R' -> \infty$, si avrà:

$$W = -\, \frac{GM_T m}{R}$$

Ma per la (24) sarà pure:

$$W = V(P) - V(\infty),$$

e quindi:

$$V(P) = -\, \frac{GM_T m}{R} + V(\infty); \qquad (27)$$

se poniamo uguale a zero l'energia potenziale a distanza infinita, avremo:

$$V(P) = -\, \frac{GM_T m}{R}. \qquad (28)$$

***

Per le forze conservative è costante rispetto al tempo, e quindi alla posizione del mobile sulla traiettoria, la somma $E = T + V$ dell'energia cinetica e dell'energia potenziale.

Esempi relativi ai viaggi spaziali

Per semplificare i calcoli trascureremo, nella trattazione seguente, la resistenza dell'aria e il moto di rotazione della Terra attorno al proprio asse.

1) La velocità orbitale circolare v_1

Un satellite di massa m deve essere posto in un'orbita circolare radente la superficie terrestre; vogliamo calcolare con quale velocità v_1 deve essere lanciato in direzione orizzontale.

Uguagliamo la forza centripeta agente sul satellite alla forza gravitazionale della Terra:

$$m\frac{v_1^2}{R_T} = G\frac{m\, M_T}{R_T^2},$$

da cui

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}. \qquad (29)$$

Questa velocità v_1 si chiama “velocità orbitale circolare” o “prima velocità cosmica”.

Essendo $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} kg$ e $R_T = 6,37 \cdot 10^6 m$, il suo valore sarà $v_1 = 7,9\, km/s$.

Il periodo orbitale è $T = \frac{2\pi R_T}{v_1} = 5066,31\ s = 84,44\, min$.

2) Satelliti geostazionari

Se un satellite descrive un giro completo attorno alla Terra esattamente in un giorno, se la sua orbita giace nel piano equatoriale terrestre, e se esso ruota nello stesso verso della Terra, allora il satellite visto dalla Terra sembra stare fermo, Satelliti di questo tipo, detti “geostazionari”, sono quindi estremamente utili per la trasmissione radio e televisiva.

Calcoleremo il raggio R dell’orbita e quindi la quota h di un tale satellite.

Per calcolare R, ricordiamo che la terza legge di Keplero, applicata al sistema Terra-Luna (+ satelliti artificiali), ci dice che

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} = 1,0107317 \cdot 10^{13} m^3/s^2.$$

Ponendo $T = 86164,094\ s$ (giorno sidereo), otterremo:

$$R = \left(\frac{GM_T \cdot T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42179\, km. \qquad (30)$$

La quota h del satellite è contata dalla superficie terrestre, perciò

$$h = R - R_T = 42179\, km - 6370\, km = 35809\, km. \qquad (31)$$

La sua velocità orbitale è $v = 2\pi\, R/T = 3,076\, km/s$.

3) Velocità di fuga v_f

La “velocità di fuga v_f” è la velocità minima che si deve imprimere a un oggetto perché possa allontanarsi a una distanza infinita dalla superficie della Terra, <<sfuggendo>> così alla sua attrazione gravitazionale. Per calcolare v_f si può osservare che l’energia cinetica iniziale sulla superficie terrestre $\frac{1}{2} m v_f^2$, verrà completamente spesa per aumentare l’energia potenziale gravitazionale iniziale, $-\frac{GM_T m}{R_T}$, fino al valore zero quando $r \rightarrow \infty$.

Cioè l’energia totale dell’oggetto, $E = T + V$, diventa esattamente zero quando $r \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = 0,$$

da cui

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2\ km/s. \qquad (32)$$

La velocità di fuga minima è quella da Plutone ($v_f = 1,23\ km/s$), seguita da quella da Mercurio ($v_f = 4,3\ km/s$); la massima è quella da Giove ($v_f = 60,3\ km/s$), seguita da quella da Saturno ($v_f = 36,1\ km/s$). La “velocità di fuga v_f” viene anche chiamata “seconda velocità cosmica”. In realtà, tale velocità non è sufficiente per permettere a un oggetto di evadere dal sistema solare, perché l’influenza gravitazionale del Sole è molto maggiore di quella della Terra. Per calcolare la velocità di fuga “dal Sole”, partendo dalla posizione della Terra, si può usare la stessa espressione (32) di v_f , sostituendo però la massa del Sole $(1,989\ \cdot 10^{30}\ kg)$ al posto di M_T e la distanza Terra-Sole $(1UA = 1,496\ \cdot 10^{11} m)$ al posto di R_T. Si trova quindi

$$v'_f = 42,1\ km/s.$$

Questa velocità è molto elevata, tuttavia per lanciare un missile verso le stelle lontane si può sfruttare anche il moto della Terra intorno al Sole, la cui velocità media è di 29,8 km/s , e lanciare il corpo nella stessa direzione del moto terrestre. Allora la velocità sarà “appena”

$$v = 42,1 - 29,8 = 12,3\ km/s\ .$$

Se desideriamo quindi che, superata la gravitazione terrestre, l’oggetto si muova con la velocità v, sarà necessaria un’energia cinetica supplementare $\frac{1}{2}mv^2$. In questo caso, facendo partire l’oggetto è necessario imprimergli l’energia cinetica iniziale

$$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}mv^2. \qquad (33)$$

In tal modo, le tre velocità in questione sono legate dalla semplice relazione

$$v_o^2 = v_f^2 + v^2. \qquad (34)$$

Ora possiamo calcolare la velocità che bisogna imprimere a un oggetto perché, uscito dalla sfera di attrazione terrestre, abbia la velocità $v = 12,3\ km/s$. Applicando la (34), otteniamo per v_o il valore di 16,6 km/s. Tale velocità è chiamata “terza velocità cosmica” e si indica con v_3; in definitiva avremo:

$$v_3 = 16,6\ km/s. \qquad (35)$$

Così un oggetto che abbia la velocità $v_f = 11,2\ km/s$ abbandona la Terra, ma non va lontano: si è liberato dall’attrazione terrestre, ma non riesce a sfuggire a quella solare, e si trasforma quindi in asteroide artificiale.

4) Le orbite dei satelliti artificiali

Abbiamo già detto che i calcoli di Newton dimostrarono che l'orbita descritta da un corpo sotto l'azione della forza gravitazionale deve essere una sezione conica. Precisamente può essere un'ellisse o una parabola o un'iperbole. La particolare conica descritta dipende dalla velocità di partenza v_o.

Come esempio consideriamo il lancio di un satellite artificiale, assimilato ad un punto materiale P. Il punto P si trova inizialmente in cima ad un monte, vicinissimo alla superficie della Terra. Se lo <<spariamo>> con velocità orizzontale v_o , si possono verificare 5 casi:

a) Se v_o è minore della velocità orbitale circolare v_1 , P descrive un'ellisse che ha il fuoco più lontano da P nel centro C della Terra e quindi cade su di essa. È il caso dei proiettili dei cannoni, per i quali il breve arco di ellisse tra la cima del monte e il suolo è approssimato mediante un arco di parabola.

b) Se $v_o = v_1 = 7,9\ km/s$, P descrive una traiettoria circolare con centro in C e raggio uguale a quello terrestre R_T .

c) Se v_o è compreso tra v_1 e la velocità di fuga v_f , P descrive un'ellisse che ha il fuoco più vicino a P coincidente con il centro della Terra.

d) Se $v_o = v_f = 11,2\ km/s$, P descrive una parabola con il fuoco nel centro della Terra.

e) Se v_o è maggiore della velocità di fuga v_f , P descrive un'iperbole con il fuoco interno nel centro della Terra.

L'energia totale $E = T + V$ del punto P rimane costante durante il suo moto orbitale ed è data da

$$E = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{GM_Tm}{R_T},$$

che, in virtù della (32), si può scrivere

$$E = \frac{1}{2}m(v_o^2 - v_f^2). \qquad (36)$$

È facile pertanto constatare che per le orbite ellittiche o circolari ($v_o < v_f$) sarà $E < 0$, per le orbite paraboliche ($v_o = v_f$) $E = 0$ e per quelle iperboliche ($v_o > v_f$) $E > 0$.

Aggiungiamo che se la forza è "repulsiva", cioè se ad essa corrisponde il segno + (come nel caso di due cariche elettriche Q e q di egual segno), l'energia potenziale è

$$V(r) = \frac{\alpha}{r} \quad \left(\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}Qq > 0\right) \qquad (37)$$

In questo caso l'energia totale E del punto P non può essere che positiva e la traiettoria è un ramo d'iperbole per la quale il punto-sorgente O è però il fuoco esterno.

Le comete

Le comete [Dal lat. “cometa”, gr. “komētēs” ‘chiomato’] sono corpi celesti molto diversi dalle stelle e dai pianeti. Sono composte da un nucleo centrale, formato da un conglomerato di ghiaccio, gas solidificati e particelle rocciose, un’atmosfera denominata “chioma” e spesso, in vicinanza del perielio, una “coda” composta da polveri e gas ionizzati, che, a causa della “pressione di radiazione” (trasferimento di quantità di moto elettromagnetica $p = \frac{E}{c}$), è sempre rivolta dalla parte opposta rispetto al Sole. Il passaggio di una stella o di una nube molecolare può perturbare l’orbita del nucleo di una cometa, avvicinandola al Sole. In tal caso, le radiazioni mutano il ghiaccio del nucleo in vapore, dando vita inizialmente a una lieve chioma di forma sferica e in seguito, man mano che aumenta la temperatura, a una coda che può raggiungere centinaia di milioni di chilometri di lunghezza.
Le comete descrivono intorno al Sole delle orbite ellittiche fortemente eccentriche, cosicchè si rendono visibili soltanto nei periodi in cui si avvicinano al Sole e nei quali diventano più brillanti, per poi scomparire quando se ne allontanano. Le comete si distinguono in “periodiche” e “non periodiche”. Le prime (circa 60), dopo un certo numero di anni tornano visibili, le altre invece dopo essere apparse una volta scompaiono definitivamente, perché descrivono orbite paraboliche o iperboliche, oppure perchè di disgregano in polvere cosmica, o il loro periodo è talmente lungo che non si è potuto calcolare.
Fra le comete periodiche celebre è quella di Edmund Halley (1656 - 1742), che si avvicina al Sole fino a 0,6UA e poi se ne allontana fino a 35,3UA; il suo periodo è di 76,08 anni e l’eccentricità della sua orbita è $e = 0,9666$. Si muove di moto retrogrado rispetto ai pianeti (cioè si muove in verso orario) e la sua ultima apparizione è avvenuta nel 1986. Sembra sia quella che Giotto ha raffigurato nell’”Epifania”, che fa parte degli affreschi della cappella degli Scrovegni di Padova (completata attorno al 1304). Il suo nucleo, dalla forma di una patata ricurva lunga circa 14 km e larga circa 7, presenta una superficie più nera del carbone.
Altre comete periodiche note sono: la cometa di Johann Franz Encke (1791 - 1865), che ha un periodo di 3,31 anni; la cometa di Crommelin, che ha un periodo di 27,9 anni ed $e = 0,9251$; la cometa di Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers (1758 - 1840), che ha un periodo di 69,6 anni ed $e = 0,9290$. Nel 1989 si è scoperto che Chirone possiede una chioma e pertanto non è un asteroide come si era ritenuto prima, bensì una cometa.
Le comete suscitavano meraviglia fin dalla più remota antichità e in quei tempi quando si credeva che la vita degli uomini fosse governata dai pianeti e dai corpi celesti in generale, si riteneva che preannunziassero qualche avvenimento sensazionale. Così nel “Giulio Cesare” di William Shakespeare (1564 - 1616) Calpurnia [moglie di Cesare] dice (Atto secondo, Seconda scena):
“ Se muore un mendicante non si vedono comete in cielo: ma i cieli stessi segnalano a fuoco la morte dei principi.”
e nel “Re Enrico VI”, Parte prima, il duca di Bedford [zio del re e reggente di Francia] declama (Atto primo, Prima scena):
“Comete, presagi di mutamento nel tempo e negli stati, brandite attraverso il cielo le vostre chiome di cristallo a frustare le stelle maligne e ribellanti che hanno cospirato alla morte del re Enrico: Enrico V [1387 - 1422], troppo glorioso per avere lunga vita.”

Carlo V (1500 - 1558), sul cui impero il Sole non tramontava mai, all'apparire d'una cometa (quella del 1556), che tanto l'impaurì col suo terribile aspetto, rinunziò al trono e si ritirò per il resto della sua vita nel convento di Sant Just. La sua malinconica fine è descritta dal conte August von Platen-Hallermünde (1796 - 1835) nella ballata "Der Pilgrim vor St. Just"(1819: "Il pellegrino davanti a Sant Just"), che è stata tradotta da Giosuè Carducci (1835 - 1907) nella raccolta poetica "Rime nuove". (1887).
Tra le scoperte di Newton che maggiormente impressionarono i suoi contemporanei va ricordata la dimostrazione del fatto che il comportamento delle comete non era casuale, ma obbediva alla legge di gravitazione, e che l'orbita delle comete poteva essere calcolata con esattezza.

***

Mi piace chiudere citando proprio Sir Isaac Newton: "Mi sembra di essere stato solo un ragazzo che gioca sulla riva del mare, divertendosi a trovare ogni tanto un ciottolo più levigato o una conchiglia più bella delle altre, mentre il grande oceano della verità si stendeva tutto da scoprire davanti a me."

DOMENICO BRUNO

BIBLIOGRAFIA

C. BERNARDINI - S. TAMBURINI, *Lezioni di fisica*. Editori Riuniti, Roma, 1981
G. BERNARDINI, *Fisica sperimentale. Parte I*. Veschi, Roma, 1962
E. BORTOLOTTI, *Storia della matematica elementare.* Hoepli, Milano, 1954
E.N. DA COSTA ANDRADE, *Isaac Newton. La vita e l'opera*. Zanichelli, Bologna, 1965
B. FINZI, *Meccanica razionale. Vol I e II*. Zanichelli, Bologna, 1959
M. GLIOZZI, *Storia del pensiero fisico*. Hoepli, Milano, 1954
L. LANDAU - A. KITAIGORODSKIJ, *La fisica per tutti.* Editori Riuniti, Roma, 1972
L. LANDAU et E. LIFCHITZ, *Mécanique*. Éditions de la Paix, Moscou
P. MAFFEI, *Al di là della Luna*. Biblioteca della EST, Milano, 1973
J.B. MARION, *La fisica e l'Universo fisico*. Zanichelli, Bologna, 1976
J. MUÑOZ SANTONJA, *Il creatore della fisica matematica moderna*. *Newton*. R.B.A. Italia, Milano, 2017
E. PERSICO, *Introduzione alla fisica matematica.* Zanichelli, Bologna, 1960
E. PERUCCA, *Fisica generale e sperimentale*. Voll I e II. U.T.E.T., Torino, 1945
SEXL, RAAB, STREERUWITZ, *Fisica 1, 2 e 3.* Zanichelli, Bologna, 1984
A. SOMMERFELD, *Mechanics.* Academic Press, New York, 1964.