GLI ITALIANI ODIANO LA MATEMATICA?

Giuseppe Zappalá

PREGHIERA DELL'AUTORE La lingua italiana ha molte particolaritá che la rendono oltremodo espressiva eppure durante il corso degli studi, medi e liceali, varie volte l'insegnante ha richiamato l'attenzione per mettere in rilievo qualche strappo linguistico chiamato "licenza", quasi sempre poetica, giustificato di solito da ragioni estetiche. Da quei tempi molte cose sono cambiate e ricordo con tanta nostalgia il piacere di scrivere a mano libera con la stilografica, oggi si scrive con ben altro oggetto il calcolatore, una grande invenzione che permette di correggere gli errori senza lasciare traccia. Ma debbo seguire le rigide regole di un programma chiamato LATEX (serve a scrivere le formule, l'unico che conosco) il quale non gradisce le vocali accentate della tastiera, la questione si risolve aumentando il numero di battute, un autentico supplizio. Pertanto spero che nessuno si offenda se mi permetto di introdurre la "licenza senile(80 e +) oltre che tecnologica", consistente nell'usare un solo tipo di accenti i quali vengono impressi premendo il tasto dell'apostrofo, a questa vanno aggiunti altri piccoli peccatucci grafici, storici...., perdonatemi!

PROLOGO

Molti anni fa, sfogliando le pagine di un settimanale fra i pu' venduti, il mio sguardo fu catturato da un titolo a tutta pagina scritto a caratteri cubitali "LA PIU' ODIATA DAGLI ITALIANI". La mia curiosita' fu presto soddisfatta, in poche righe il redattore informava che, una consultazione riservata agli studenti delle scuole medie del primo e del secondo ordine, aveva confermato quello che prima era soltanto un(suo) sospetto: la matematica e' la materia piu' odiata dagli studenti italiani, giudizio espresso con una percentuale da capogiro. Dopo tanti anni non ricordo i particolari come il numero degli studenti coinvolti, il luogo, la formulazione del questionario, le contromisure proposte per limitare il fenomeno. Ricordo invece la malcelata soddisfazione (quasi euforia) del cronista, per il quale la matematica(era arida e astratta ovviamente) ha la proprieta' innata di sterilizzare l'animo e glorificava l'operato dei due intellettuali estensori del progetto di una riforma infelice che assegno' a quella disciplina un compito subalterno anche in quella scuola chiamata(ironicamente) LICEO SCIENTIFICO, dove ho trascorso i cinque anni peggiori della mia giovinezza e dalla quale escono troppi giovani che vanno in fuori-corso studiando matematica, fisica, ingegneria, chimica, informatica, economia, scienze naturali, architettura. Fuori corso per un solo anno ci sono stato anch'io, dopo tre di liceo durante i quali alla matematica l'orario scolastico assegnava tre misere orette alla settimana, seguire analisi matematica e geometria analitica per dodici fu un impegno che assorbi' tutte le mie risorse, non ero stato allenato a sostenere quel ritmo, ho studiato in un solo anno piu' del doppio di tutta la matematica dei cinque precedenti e cosi ho rinviato a dopo le rimanenti materie: fisica I, laboratorio di fisica I, chimica. Il motivo che mi spinge a scrivere queste righe deriva dalla profonda delusione suscitata da una notizia pubblicata in una rivista(carta e leggi) con la quale si porta a conoscenza che in alcuni istituti sono in atto degli esperimenti che dovrebbero dare vita al sospirato LICEO MATEMATICO. Chiedo scusa ai colleghi, ammiro l'impegno profuso, la disponibilita' ma, secondo me, non sono sulla buona strada; non ha senso un nome altisonante per giustificare qualche piccolo ritocco dell'orario, qualche ora sottratta possibilmente alla ginnastica, cosi' facendo a comandare saranno sempre gli insegnanti delle materie letterarie e sono queste invece che vanno drasticamente limitate. Smettiamola di perdere tempo per indovinare l'identita' del "veltro", per scoprire il significato del "pape' satan, pape' satan, pape' satan aleppe" o di fare del gossip sulla paternita' di un grande romanziere. Il cervello umano non e' un sacco da riempire con le storie(storia, storia della filosofia, storia della letteratura italiana, storia della letteratura latina, storia di una letteratura straniera, storia dell'arte nascosta nel corso di disegno e storia sacra nel corso di religione) che, studiate tutte assieme, sottoposero ad un autentico lavaggio il mio cervello. Migliaia di titoli, date, nomi e cognomi fatti, ottimo allenamento al fine di partecipare a trasmissioni televisive ma allora la televisione stava per essere inventata. Superato l'esame di maturita', per nove anni non ho letto un libro che non fosse un trattato scientifico, eppure in seconda e terza media ho trascorso ore indimenticabili leggendo per intero l'Iliade e l'Odissea in edizione integrale.

Per gli italiani che amano la matematica o potrebbero innamorarsene ho scritto quanto segue.

UN FAMOSO PROBLEMA DI ARITMETICA

I numeri naturali si possono dividere in numeri pari e numeri dispari oppure in numeri primi e numeri composti , dalla prima suddivisione(a mia conoscenza) scaturisce un solo risultato quasi sorprendente messo in luce da Galileo Galilei, moltiplicando per 2 tutti i numeri naturali si ottiene la successione dei numeri pari; dalla seconda deriva una abbondante collezione di problemi non tutti risolti che rendono oltremodo attrattivo lo studio della teoria dei numeri. Per affrontare un problema riguardante i numeri naturali, passato alla storia e del quale sembra si siano occupati due matematici di primissimo ordine, sono utili le seguenti definizioni:

Definizione 1 - Due o piu' numeri (naturali) sono primi fra loro(co-primi o coprimi) se ammettono come divisore comune soltanto il numero 1 il quale risulta co-primo per tutti.

Definizione 2- Due o piu' numeri > 1 sono co-multipli(o comultipli) se ammettono divisori comuni maggiori di 1.

Definizione 3- Dato il numero $m > 1$ si chiamano "co-primi di m" i numeri co-primi con m e inferiori a questo.

Definizione 4- Dato il numero $m > 1$ si chiamano "co-multipli di m" il numero stesso oltre i co-multipli con m inferiori a questo.

Definizione 5 - Dato il numero naturale $m > 1$, col simbolo $\phi(m)$, detto indicatore di Eulero-Gauss, si denota il numero dei naturali co-primi di m; si chiama controindicatore di E.G. e si indica col simbolo $\psi(m)$ il numero dei co-multipli di (m). Evidentemente risulta

$$\phi(m) + \psi(m) = m; \quad \phi(m) = m - \psi(m). \quad (1)$$

Problema(di Eulero-Gauss) - Assegnato il numero naturale m determinare il numero dei coprimi di m.

Esempio 1- Se $m = 12$ basta scrivere la successione(finita) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e notare che 1, 5, 7, 11 sono co-primi con 12 e non superiori a 12 quindi si ottiene "sperimentalmente" $\phi(12) = 4$, volendo contare i co-multipli di 12 basta elencarli 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12 sono 8 quindi $\psi(12) = 8$ e $4+8 = 12$ a conferma della (1). Questa procedura non soddisfa il matematico il quale individua, nella decomposizione in fattori primi di m, la base di partenza per venire a capo della soluzione generale espressa mediante i seguenti teoremi.

Teorema 1- Se il numero p divide il numero $m > p$, allora i multipli di p che non superano m sono $m/p = \frac{m}{p}$, infatti questi sono:

$$p,\ 2p,\ 3p, ..., (m/p) \cdot p = m. \qquad (2)$$

Esempi 2 - 1) Se $m = 16 = 2^4$ i comultipli di 16 sono: $2,\ 4, 6,\ 8, 10, 12, 14, 16$ ovvero 16/2=8. 2) Se $m = 25$ allora 25/5=5 infatti i multipli di 5 non superiori a 25 sono: $5, 10, 15, 20, 25$ in totale 5. 3) Se $m = 36 = 2^2 \cdot 3^2$ i fattori primi sono 2 e 3 , di multipli del numero 2 che sono i pari non superiori a 36, se ne contano 18=36/2, i multipli di 3 sono $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36$ dodici in totale e 12=36:3, continuando si ha 36:4=9 poi 36:6 =6, 36:9=4, ,36:18=2.

Teorema 2 - Se $p_1, p_2, ..., p_n$ sono i fattori primi tutti diversi e > 1 del numero m si dimostra che

$$\phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_n}\right). \quad (3)$$

Esempio 3 - Nel caso di $m = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ si ricava

$$\phi(180) = 180\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 180\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = 48. \quad (4)$$

Dimostrazione limitata a soli 4 divisori primi p, q, r, s. che si suppone siano sempre vincolati dalla relazione(puramente nominale) $1 < p < q < r < s$ e dalla $pqrs \leq m$ le quali non intervengono nelle dimostrazioni. Parimente gli esponenti delle potenze che verranno considerate sanno supposte sempre > 1.

a) Se il numero $m > 1$ e' primo, non ha divisori in comune con i numeri che lo precedono, quindi si ha

$$\phi(m) = m - 1 = m(1 - \frac{1}{m}). \qquad (5)$$

b) Se m ha un solo divisore primo $p > 1$ come $m = p^n$ allora i suoi co-multipli sono esattamente

$$\psi(m) = \frac{m}{p} \qquad (6)$$

di conseguenza

$$\phi(m) = m - \psi(m) = m - \frac{m}{p} = m\left(1 - \frac{1}{p}\right). \qquad (7)$$

c) Se m ha soltanto 2 divisori primi > 1 e diversi p , q $(1 < p < q,\ pq \leq m)$ i multipli di p e q che non superano m sono rispettivamente:

$$1)\, p,\ 2p, ..., pq, ..., [m/(p)]p = m, \quad , 2)\, q,\ 2q, ..., qp, ..., [m/(q)]q = m \quad (8)$$

nel rigo precedente stanno m/p multipli di p assieme a m/q multipli di q in totale $m/p + m/q$ comultipli di m. Ma fra questi sono conteggiati due volte i multipli di $pq = qp$ che sono in totale $m/(pq)$ e quindi l'esatto numero dei co-multipli di m contati una sola volta e'

$$\psi(m) = m/p + m/q - m/(pq) \qquad (9)$$

pertanto si ottiene

$$\phi(m) = m - \frac{m}{p} - \frac{m}{q} + \frac{m}{pq} = m\left[1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}\right] =$$

$$= m\left[1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right] = m\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right). \quad (10)$$

d) Determinare il numero dei numeri naturali minori di uno preventivamente assegnato e primi con questo(supposto ≥ 2), e' uno dei problemi piu' famosi dell'ARITMETICA, di questo si sono occupati due autentici fuoriclasse di nazionalita' diverse L.P. Euler(Eulero) e C.F. Gauss, svizzero il primo e tedesco il secondo. Nella mia modestissima biblioteca si trovano ben cinque libri che si occupano dell'argomento, escluso uno avente carattere esclusivamente informativo, i quattro rimanenti messi assieme sono proprio deludenti in quanto i rispettivi Autori, esposta la questione, amano giocare con i lettori a rimpiattino. Due si limitano a considerare in modo esauriente soltanto i casi in cui quello(m) e' composto con uno o con due soli divisori primi, dopo di che presentano la formula (3) e affermano che ad essa si perviene per induzione senza mostrarne il procedimento conclusivo . Un terzo definisce la funzione $\phi(m)$ chiamata "indicatore di Eulero" ovvero la (3) suddetta, ne descrive le caratteristiche per poi allinearsi ai due precedenti. Il quarto, che si propone di spiegare al prossimo in che cosa consiste la matematica, si sbilancia e con poco riguardo per la ditta E.G. afferma "Tralasciamo la dimostrazione, benche' del tutto elementare". Sono spiacente, ma dichiarazioni e comportamenti di questo tipo non favoriscono la diffusione della cultura matematica, al contrario sono utili ai suoi detrattori per coniare le espressioni piu' diffamatorie; i lettori attenti e desiderosi di apprendere gradiscono conoscere le soluzioni dei problemi come il GENIO degli Autori le ha concepite, senza manipolazioni e odiose scorciatoie. Mi fermo con le critiche a questo punto e mi limito a mostrare la matematica che viene fuori continuando le ricerche.

ADESSO VIENE IL BELLO

e) Esempio di ricerca sperimentale - Il numero 30 ha come divisori primi 2,3,5($2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$), in base al teorema 13.9 i multipli di 2,3,5 non superiori a 30 sono rispettivamente 30/2, 30/3, 30/5 ovvero 15, 10, 6 come confermato dalla seguente tabella:
multipli di 2 - 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30
multipli di 3 - 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30
multipli di 5 - 5, 10, 15, 20, 25, 30
in totale sono $31 > 30$, sembra un assurdo. Il $fenomeno$ si manifesta per la presenza di numeri che figurano in righe differenti, ad esempio il 12 sta nella prima e nella seconda il 15 nella seconda e terza il 30 in tutte. Per eliminare l'inconveniente occorre scoprire come caratterizzare i numeri in eccesso, essi sono i multipli dei prodotti $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$ ovvero quelli delle tre righe seguenti
multipli di $2 \cdot 3$ - 6, 12, 18, 24, 30 in totale 30/6=5
multipli di $2 \cdot 5$ - 10, 20, 30 in totale 30/10 =3

multipli di $3 \cdot 5$ - 15, 30 in totale 30/15 =2.
Eliminandoli si ottiene la tabella rettificata:
multipli di 2 - 2, 4, 8, 14, 16, 22, 26, 28 in totale 8
multipli di 3 - 3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27 in totale 8
multipli di 5 - 5, 10, 15, 20, 25 in totale 5
In questa non sono presenti ripetizioni e figurano 21 co-multipli di 30, ma non figura il numero di partenza quindi $\psi(30) = 21 + 1 = 22$, da cui deriva $\phi(30) = 30 - \psi(30) = 30 - 22 = 8$ ovvero 1,7,11,13,17,19,23,29.

f) Dalla pratica alla teoria. Per ipotesi i 3 divisori primi di m siano p, q, r con $1 < p < q < r$ e $pqr \leq m$ allora fra i primi m naturali si trovano
a) m/p numeri minori o uguali ad m e multipli di p:

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p, ...[m/(p)]p = m, \quad (11)$$

b) m/q numeri minori o uguali ad m e multipli di q:

$$q,\ 2q,\ 3q,\ 4q, ...[m/(q)]q = m, \quad (12)$$

c) m/r numeri minori o uguali ad m e multipli di r:

$$r,\ 2r,\ 3r,\ 4r, ...[m/(r)]r = m, \quad (13)$$

da (11),(12),(13) si deduce che la somma $m/p + m/q + m/r$ rappresenta il numero dei co-multipli di m in tabella fra i quali si riscontrano delle ripetizioni, i multipli di pq, qr, pr sono presenti ciascuno in due righe distinte rispettivamente prima-seconda, seconda-terza e prima-terza mentre i multipli di pqr. figurano in a),b),c). Se dalla somma suddetta vengono tolti i numeri dei multipli di pq di qr e di pr(fra i quali sono conteggiati i multipli di pqr) si ottiene

$$m/p + m/q + m/r - m/(pq) - m/(pr) - m/(qr) \qquad (14)$$

quindi per ottenere $\psi(m)$ occorre sommare al risultato della (14) il numero dei multipli di pqr che sono $m/(pqr)$ e si ricava quello dei comultipli di m ognuno contato una sola volta

$$\psi(m) = \frac{m}{p} + \frac{m}{q} + \frac{m}{r} - \frac{m}{pq} - \frac{m}{pr} - \frac{m}{qr} + \frac{m}{pqr} = m - \phi(m) \quad (15)$$

dalla quale si deduce successivamente(16) :

$$\phi(m) = m - \psi(m) = m - \frac{m}{p} - \frac{m}{q} - \frac{m}{r} + \frac{m}{pq} + \frac{m}{pr} + \frac{m}{qr} - \frac{m}{pqr} =$$

$$= m\left\{1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{qr} - \frac{1}{pqr}\right\} =$$

da questa accoppiando il primo termine con il secondo, il terzo con il quinto, il quarto con il sesto, il settimo con l'ottavo si ottiene a seguire(17)

$$= m\left\{\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{qr}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right\} =$$

$$= m\left\{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left[1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{1}{qr}\right]\right\} =$$

$$= m\left\{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left[1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{q}\right)\right]\right\} =$$

$$= m\left\{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left[\left(1 - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{q}\right)\right]\right\}$$

in conclusione

$$\phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right). \quad (18)$$

Applicando la formula ottenuta(18) al numero $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ si ottiene

$$\phi(60) = 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 16. \quad (18bis)$$

I lettori controllino il risultato sperimentale ottenuto per $m = 30$.

g) Se m ha 4 divisori primi $p, q, r, s (1 < p < q < r < s)$ e $pqrs \leq m$, ragionando alla stessa maniera dei casi precedenti, vi saranno:
a) m/p numeri non superiori ad m multipli di p,
b) m/q numeri.. di q,
c) m/r numeri.. di r,
d) m/s numeri...di s.
Volendo contare gli elementi della soprastante e sintetica tabella, comprendente tutti e soltanto i co-multipli di m, si ottiene il numero dato dalla formula

$$m/p + m/q + m/r + m/s \qquad (19)$$

ma come nei casi precedenti vi sono delle ripetizioni mostrate nel seguente prospetto
a') fra i multipli di p si trovano quelli di pq, pr, ps, pqr, pqs, prs, $pqrs$
b')........................q............................qp, qr, qs, qpr, qps, qrs, $pqrs$

c')........................r.............................rp, rq, rs, rps, rpq, rqs, $pqrs$
d')........................s............................sp, sq, sr, sqr, spr, spq, $pqrs$
per eliminarne il numero occorre togliere anzitutto(dalla 19) il numero dei multipli di pq, pr, ps, qr, qs, rs (fra i quali si trovano i multipli di pqr, pqs, psr, qsr, $pqrs$) che in totale sono

$$m/(pq) + m/(pr) + m/(ps) + m/(qr) + m/(qs) + m/(rs). \quad (20)$$

Effettuata l'operazione "pulizia" rimane il numero (21)

$$m/p{+}m/q{+}m/r{+}m/s{-}m/(pq){-}m/(pr){-}m/(ps){-}m/(qr){-}m/(qs){-}m/(rs)$$

sono state eliminate le ripetizioni ma non sono conteggiati i multipli di pqr, pqs, prs, qrs e di consequenza quelli di $pqrs$ che erano presenti in ogni rigo dell'elenco iniziale.
Per ottenere l'esatto numero dei co-multipli di m prima si calcola il numero

$$m/(pqr) + m/(pqs) + m/(prs) + m/(qrs) \qquad (22)$$

che viene sommato al totale di (21), operando in questo modo vengono contati i multipli di tre fattori che erano stati eliminati nel passaggio da (20) a (21) e vengono ricontati 4 volte i multipli di $pqrs$. Per pareggiare i conti occorre tornare indietro e ricordare che questi ultimi, nel quadro iniziale, si trovano scritti quattro volte, inoltre questo numero viene "sottratto" sei volte passando da (19) a (21), dato che 4-6+4=2 basta sottrarre una sola volta il numero $m/pqrs$ e si perviene al numero richiesto $\psi(m)$ dato da

$$\psi(m) = \frac{m}{p} + \frac{m}{q} + \frac{m}{r} + \frac{m}{s} - \frac{m}{pq} - \frac{m}{pr} - \frac{m}{ps} - \frac{m}{qr} - \frac{m}{qs}$$
$$-\frac{m}{rs} + \frac{m}{pqr} + \frac{m}{pqs} + \frac{m}{prs} + \frac{m}{qrs} - \frac{m}{pqrs}. \quad (23)$$

Tenuto conto che $\phi(m) = m - \psi(m)$ si ottiene :

$$\phi\,(m) = m - \frac{m}{p} - \frac{m}{q} - \frac{m}{r} - \frac{m}{s} + \frac{m}{pq} + \frac{m}{pr} + \frac{m}{ps} + \frac{m}{qr} +$$
$$+\frac{m}{qs} + \frac{m}{rs} - \frac{m}{pqr} - \frac{m}{pqs} - \frac{m}{prs} - \frac{m}{qrs} + \frac{m}{pqrs} \quad (24)$$

il cui secondo membro diviene

$$m\left\{1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} - \frac{1}{s} + \frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{ps} + \frac{1}{qr} + \right.$$

$$+\frac{1}{qs}+\frac{1}{rs}-\frac{1}{pqr}-\frac{1}{pqs}-\frac{1}{prs}-\frac{1}{qrs}+\frac{1}{pqrs}\Bigg\} \quad (25)$$

e cambiando opportunamente l'ordine degli addendi (26)

$$m\left\{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}-\frac{1}{r}+\frac{1}{pr}-\frac{1}{s}+\frac{1}{ps}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{qr}-\frac{1}{pqr}+\frac{1}{qs}-\frac{1}{pqs}+\frac{1}{rs}-\frac{1}{prs}-\frac{1}{qrs}+\frac{1}{pqrs}\right\}$$

raggruppando a coppie terzo-quarto, quinto- sesto, settimo-ottavo,.... .(27)

$$-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}=-\frac{1}{q}\left(1-\frac{1}{p}\right),\ -\frac{1}{r}+\frac{1}{pr}=-\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{p}\right),\ -\frac{1}{s}+\frac{1}{ps}=-\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{1}{qr}-\frac{1}{pqr}=\frac{1}{qr}\left(1-\frac{1}{p}\right),\ \frac{1}{qs}-\frac{1}{pqs}=\frac{1}{qs}\left(1-\frac{1}{p}\right),\ \frac{1}{rs}-\frac{1}{prs}=\frac{1}{rs}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$$-\frac{1}{qrs}+\frac{1}{pqrs}=-\frac{1}{qrs}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

l'interno della (26) diviene

$$1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{qr}\left(1-\frac{1}{p}\right)+$$

$$\frac{1}{qs}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{rs}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{qrs}\left(1-\frac{1}{p}\right) \quad (28)$$

mettendo in evidenza il binomio $1-1/p$ si perviene alla

$$\phi(m)=m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left\{1-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{qs}+\frac{1}{rs}-\frac{1}{qrs}\right\} \quad (29)$$

che seguendo la strategia precedente si scrive (30)

$$\phi(m)=m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left\{1-\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{rs}\left(1-\frac{1}{q}\right)\right\}$$

con ulteriori raccoglimenti si ottiene (31)

$$\phi(m)=m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left\{1-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}+\frac{1}{rs}\right\}=$$

$$m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left\{1-\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{r}\right)\right\}=$$

$$m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\left\{1-\frac{1}{s}\right\}$$

in definitiva

$$\phi(m)=m\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right). \quad (32)$$

Come volevasi dimostrare, da rilevare che la (32) si ottiene dalla (3) quando il numero m ha quattro divisori primi(> 1) diversi fra loro.

h) Ho deciso di non andare oltre avendo raggiunto il mio scopo, consistente nel mostrare in concreto come ragionano i matematici, vanno sempre alla ricerca del problema piu' difficile, da notare che per ottenere tecnicamente $\phi(m)$ nei casi esaminati basta saper mettere in evidenza.

Bibliografia

Ambrisi E.- I 120 anni della MATHESIS(a pag. 124 in appendice si trova l' orario settimanale d' insegnamento del Liceo Scientifico D. m. 1-12-1952)

NOTE PERSONALI -Giuseppe Zappala' e' laureato in matematica(110 e lode, Universita'di Catania) inizia la carriera come assistente straordinario di Meccanica Razionale, successivamente insegna fisica e laboratorio poi matematica e fisica negli Istituti Tecnici, ritorna all'insegnamento universitario come incaricato di Complementi di Matematica (per ingegneri), dopo concorso insegna Meccanica Razionale e chiude con Sistemi Dinamici non Lineari. Autore di numerose pubblicazioni in riviste estere e nazionali(oltre 300 pagine) si e' occupato Meccanica dei sistemi con masse variabili, Stabilita' alla Liapunov per le soluzioni di equazioni differenziali in R^n. Facilmente reperibili sono: 1) Restricted total stability and total attractivity[Electron J. of diff. equations 2006(87)]. 2) Stability properties of differential systems under constanly acting perturbations[Electron J. of diff. equations 2010(152)](con G. Cantarelli). 3) The (h_0, h) strong instability under two constantly acting perturbations[Pioneer Journal of Advances in Applied Mathematics Volume 24, number I, 2018]. 4) DALL' INFINITO POETICO ALL' INFINITO MATEMATICO(attraverso il filosofico) Ed. Aracne, Roma 2016(Amazon).