SOLUZIONE

1. Se $a > 0$ allora la funzione è sempre continua e il suo dominio $D \equiv R$

   Se $a < 0$ allora la funzione $f_a(x)$ può essere così riscritta ponendo $a = -t \quad con \quad t > 0$:

$$f_a(x) = \frac{-tx}{x^4 - \left(\sqrt{t}\right)^2} \quad ovvero \quad f_a(x) = \frac{-tx}{\left(x^2 - \sqrt{t}\right)\left(x^2 + \sqrt{t}\right)}$$

   per cui la condizione di esistenza è che: $x \neq \pm\sqrt[4]{t}$ da cui il dominio

   $D \equiv \mathbb{R} - \{\pm\sqrt[4]{t}\}$

   Pertanto studiando i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to +\sqrt[4]{t}^+} \frac{-tx}{\left(x^2 - \sqrt{t}\right)\left(x^2 + \sqrt{t}\right)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\sqrt[4]{t}^-} \frac{-tx}{\left(x^2 - \sqrt{t}\right)\left(x^2 + \sqrt{t}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt[4]{t}^+} \frac{-tx}{\left(x^2 - \sqrt{t}\right)\left(x^2 + \sqrt{t}\right)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt[4]{t}^-} \frac{-tx}{\left(x^2 - \sqrt{t}\right)\left(x^2 + \sqrt{t}\right)} = +\infty$$

ne deduciamo che per $x = \pm\sqrt[4]{t}$ abbiamo due discontinuità di seconda specie e le rette di equazione $x = +\sqrt[4]{t}$ e $x = -\sqrt[4]{t}$ sono asintoti verticali per la curva.

Inoltre $\forall\ a \in R, con\ a \neq 0$, calcolando il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax}{x^4 + a} = 0$$

possiamo osservare che la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale completo per la curva.

2. La funzione $f(x)$ passante per il punto P si ottiene sostituendo le coordinate di P nella funzione $f_a(x)$:

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{1 + a} \quad \rightarrow a = 1$$

Pertanto

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 1}$$

f è simmetrica rispetto all'origine, infatti applicando le equazioni della simmetria rispetto all'origine $O(0,0)$:

$$\begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}$$

si ottiene la stessa funzione:

$$-y=\frac{-x}{(-x)^4+1} \quad \rightarrow \quad y=\frac{x}{x^4+1}$$

Inoltre $f(x)$ è positiva per $x>0$ e negativa per $x<0$, interseca gli assi nell'origine $O(0{,}0)$, ha un solo asintoto orizzontale completo di equazione y=0 che si deduce dai seguenti limiti:

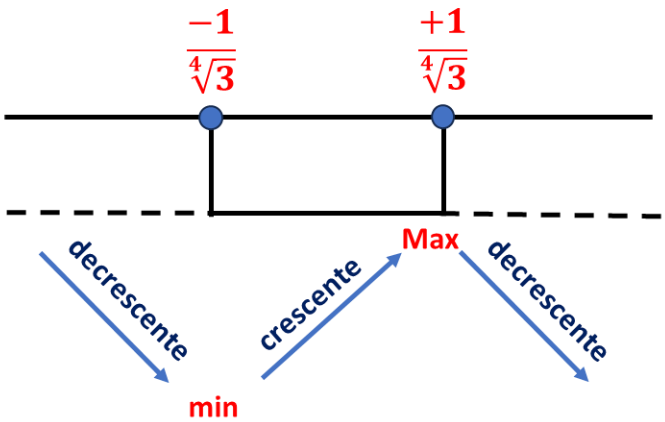
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^4+1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^4+1}=0$$

Riguardo alla monotonia, studiamo la derivata prima:

$$f'(x)=\frac{-3x^4+1}{(x^4+1)^2}\geq 0$$

$$se \qquad -3x^4+1\geq 0 \quad \rightarrow \quad \left(1+\sqrt{3}x^2\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}x^2\right)\geq 0$$



per cui la funzione è crescente per

$$\frac{-1}{\sqrt[4]{3}} < x < \frac{+1}{\sqrt[4]{3}}$$

e decrescente per

$$x < \frac{-1}{\sqrt[4]{3}} \quad e \quad x > \frac{+1}{\sqrt[4]{3}}$$

mentre gli estremi relativi sono i seguenti:

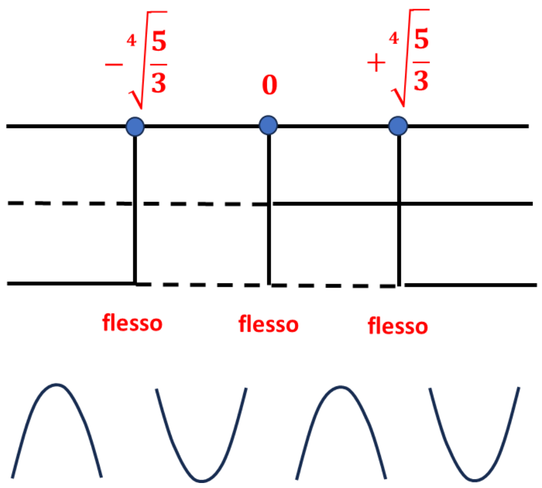
$$min\left(\frac{-1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{-3}{4\sqrt[4]{3}}\right) \quad e \quad Max\left(\frac{+1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{+3}{4\sqrt[4]{3}}\right)$$

Studiamo la derivata seconda per la ricerca dei flessi:

$$f''(x) = \frac{4x^3(3x^4 - 5)}{(x^4 + 1)^3} \geq 0$$

$$\frac{4x^3\left(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3}x^2 - \sqrt{5}\right)}{(x^4 + 1)^3} \geq 0$$

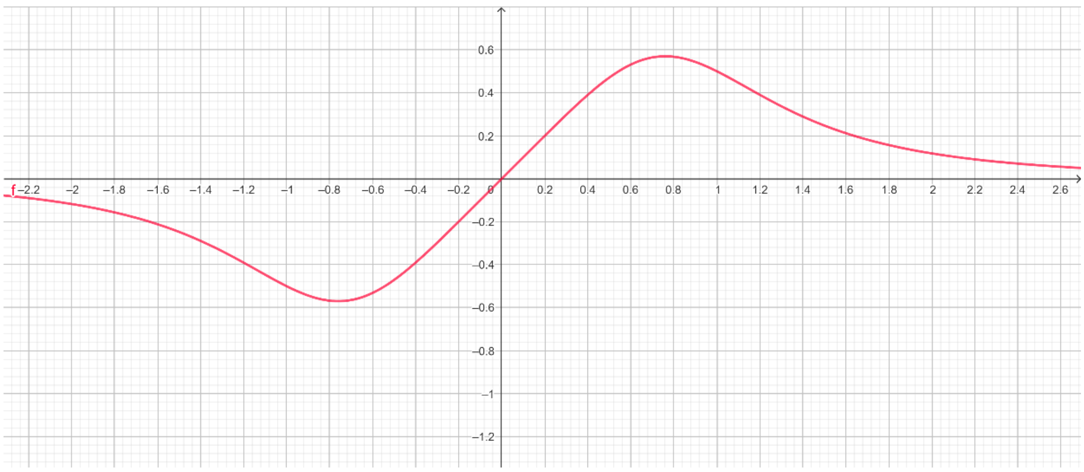
$$se \qquad \begin{matrix} x \geq 0 \\ x \leq -\sqrt[4]{\frac{5}{3}} \quad e \quad x \geq +\sqrt[4]{\frac{5}{3}} \end{matrix}$$



mentre i flessi a tangente obliqua sono i seguenti:

$$F_1\left(-\sqrt[4]{\frac{5}{3}},-\frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right) \quad e \quad F_2(0,0) \quad e \quad F_3\left(-\sqrt[4]{\frac{5}{3}},+\frac{3}{8}\sqrt[4]{\frac{5}{3}}\right)$$

Il grafico di f è dunque il seguente:



3. Determiniamo ora nell'intervallo $[0,2]$ il valor medio di f:

Il teorema del valor medio per gli integrali ci garantisce che se una funzione f è continua in un intervallo $[a, b]$ esiste sempre almeno un punto c di tale intervallo in cui f assume il suo valor medio

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

per cui essendo f continua, $\forall x \in R$

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x}{x^4+1}\,dx$$

Ponendo $x^2 = t \quad da\ cui \quad 2x\,dx = dt$

$$f(c) = \frac{1}{4}\int_0^4 \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{4}arctg4$$

4. Calcoliamo ora l'area della zona di piano compresa tra f e l'asse x:

$$Area = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty} arctgb^2 = \frac{\pi}{2}$$

5. Per determinare il grafico di f' osserviamo che:

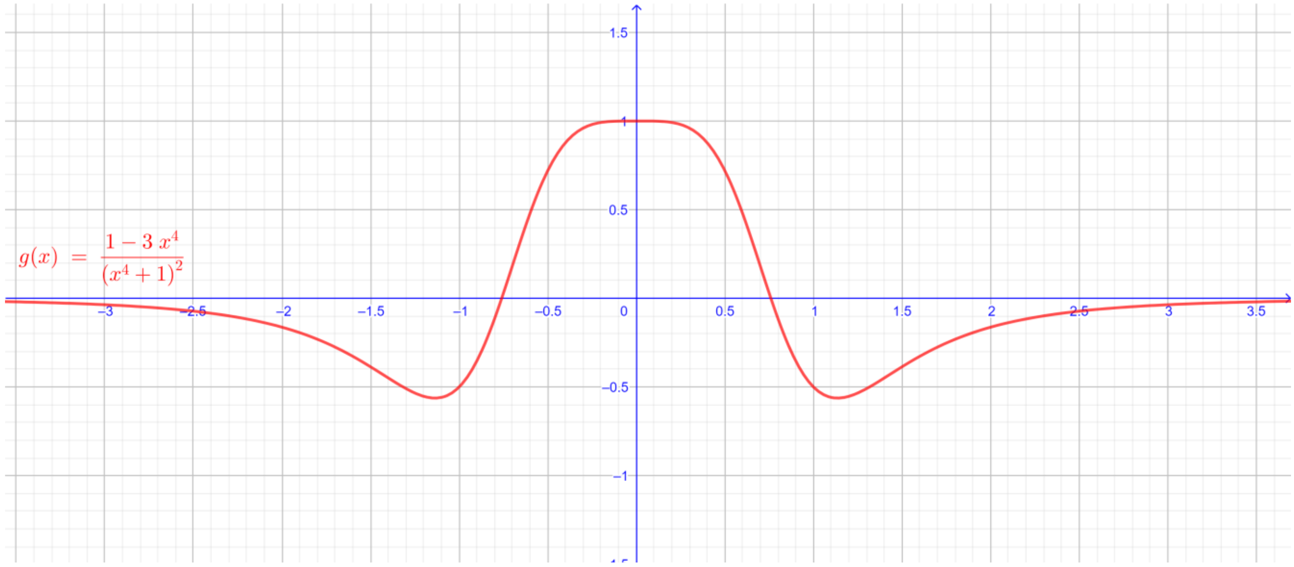
a) Poiché fè dispari, allora f' è pari cioè simmetrica rispetto all'asse y;

b) Gli estremi di f sono le intersezioni di f' con l'asse x:

c) Dove f è crescente allora f' è positiva;

d) Dove f è decrescente allora f' è negativa;

e) I flessi a tangente obliqua di f sono estremi per f'


$g(x) = \frac{1 - 3x^4}{(x^4+1)^2}$
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5