## Spunti didattici

**Le proprietà della funzione esponenziale- Dominio , monotonia, continuità**
**Dai metodi elementari ai metodi dell'Analisi**

A livello elementare, generalmente ,si introduce la funzione esponenziale come estensione dell'operazione di potenza al caso in cui l'esponente sia un numero razionale e poi un numero reale qualunque (conservandone sempre le proprietà formali). Il prolungamento continuo in R viene affrontato solitamente in modo euristico, rappresentando in modo intuitivo la densità di Q in R e l'assioma di completezza.

L'antico metodo della corrispondenza fra due progressioni, aritmetica e geometrica rispettivamente, mantiene ancora una valenza didattica , permette un confronto immediato fra esponenziale e logaritmo e ne rafforza il legame .
Esempio

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $q$ | $q^2$ | $q^3$ | $q^4$ | $q^5$ | $q^6$ | $q^7$ | $q^8$ |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

- La progressione aritmetica è costituita da numeri interi mentre, nella progressione geometrica, la ragione $q$ è un numero reale positivo diverso da 1
- Allo 0 della progressione aritmetica corrisponde il valore 1 di quella geometrica.
- I termini consecutivi della progressione aritmetica presentano un incremento costante, quelli della progressione geometrica un incremento proporzionale al valore attuale.
- I numeri della seconda riga sono i logaritmi (interi) in base $q$ dei numeri sovrastanti
- Al prodotto di due termini della progressione geometrica corrisponde, nella progressione aritmetica, la somma dei due logaritmi (Proprietà degli esponenti)

Per passare a logaritmi frazionari basta inserire un certo numero $n$ di "medi", per esempio tra 0 e 1 , nella progressione aritmetica. Dividendo l'intervallo in $n+1$ parti uguali si ottiene una progressione aritmetica di ragione $\frac{1}{n+1}$

$$0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots \frac{k}{n+1}, \dots . \frac{n+1}{n+1} = 1$$

Inserendo, in corrispondenza, $n$ medi tra 1 e $q$ nella progressione geometrica, si deve imporre $(q')^{n+1} = q \rightarrow q' = \sqrt[n+1]{q}$.
Si può , d'altronde, lasciare invariata la base $q$ della potenza e passare ad un esponente frazionario, definendo pertanto le potenze con esponente razionale, conservando la proprietà degli esponenti

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $q^{\frac{1}{5}}$ | $q^{\frac{2}{5}}$ | $q^{\frac{3}{5}}$ | $q^{\frac{4}{5}}$ | $q$ | $q^{\frac{6}{5}}$ | $q^{\frac{7}{5}}$ | $q^{\frac{8}{5}}$ | $q^{\frac{9}{5}}$ | $q^2$ |
| 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{5}$ | 1 | $\frac{6}{5}$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{9}{5}$ | 2 |

Con questo metodo si può costruire un sistema di logaritmi, in base $q$ ,dei soli numeri reali che si possono esprimere come potenze razionali di $q$.
Sia ora $\alpha$ un numero irrazionale tale che $h < \alpha < h + 1$.
Inserendo un certo numero di medi tra $h$ e $h + 1$ otterremo una successione di numeri razionali del tipo $h_1 + \frac{x}{n}$ con $0 < x < n$ , tra i quali alcuni sono compresi tra $h$ $e$ $\alpha$ , altri tra $\alpha$ $e$ $h + 1$. I due insiemi costituiscono due classi separate e contigue di cui $\alpha$ è l'unico elemento separatore

$$h_1 + \frac{x_1}{n} < \alpha < h_1 + \frac{x_1 + 1}{n}$$

In corrispondenza, nella progressione geometrica, si vengono a formare le due classi separate e contigue costituite, rispettivamente, dagli elementi della successione $q^{h_1 + \frac{x_1}{n}}$ i cui esponenti sono minori di $\alpha$ e quelli della successione $q^{h_1 + \frac{x_1+1}{n}}$ in cui gli esponenti sono maggiori di $\alpha$.
L'elemento separatore definisce il numero $y = q^\alpha \rightarrow \alpha = \log_\alpha y$

Si può verificare che valgono le proprietà

$$q^{\alpha+\beta} = q^\alpha \cdot q^\beta \qquad\qquad \log_q(x \cdot y) = \log_q x + \log_q y$$

Abbiamo così definito una funzione $f : \mathrm{R} \rightarrow ]0; +\infty[ \;\; f(x) = a^x$ . essendo $a$ un numero reale positivo diverso da 1.
La funzione $a^x$, è **monotona** crescente se $a > 1$ e monotona decrescente se $a < 1$ .
Dimostriamo che è **continua in** $\mathbb{R}$:

a) Dimostriamo innanzitutto la continuità nel punto di ascissa 0:
Supposto $a > 1$, la funzione $a^x$ è monotona crescente; esiste, quindi, $\lim_{x \to 0^+} a^x$;
per determinarlo é sufficiente calcolarlo su una successione di numeri razionali ( esponenti , ovvero logaritmi) tendente a 0.
Poiché $\lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \rightarrow \lim_{x \to 0^+} a^x = 1 = a^0$
In modo analogo, utilizzando la successione $-\frac{1}{n}$ si dimostra che

$$\lim_{x \to 0^-} a^x = 1 = a^0$$

*E' interessante fare un confronto col procedimento classico "$\varepsilon - \delta$", procedimento sicuramente più conciso ma piuttosto meccanico:*
*-la funzione $a^x$ è continua nel punto $x = 0$ poiché, fissato un numero $\varepsilon$ positivo, arbitrariamente piccolo, esiste un numero $\delta_\varepsilon$ tale che per $|x| < \delta_\varepsilon$è verificata la disuguaglianza $|a^x - 1| < \varepsilon$*
*Infatti ,nell'ipotesi non restrittiva che sia $\varepsilon < 1$ le soluzioni della disequazione*

$|a^x - 1| < \varepsilon$ :

$$log_a(1-\varepsilon) < x < log_a(1+\varepsilon),$$

*costituiscono un intorno completo di* 0.

b) Per dimostrare che la funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$ osserviamo che, per la proprietà degli esponenti,

$$\lim_{h\to 0}(a^{x+h} - a^x) = \lim_{h\to 0} a^x(a^h - 1)$$

Ma, per quanto dimostrato nel punto a). $\lim_{h\to 0}(a^h - 1) = 0.$

Pertanto, $\lim_{h\to 0}(a^{x+h} - a^x) = 0 \to \lim_{x\to 0} a^{x+h} = a^x$

## Il significato fisico delle proprietà formali

La conservazione delle proprietà formali nel processo, di ampliamento-generalizzazione, non risponde solo all' esigenza di coerenza teorica o di comodità nei calcoli; permettere altresì di estendere ai modelli di crescita ( o decrescita) a tasso di variazione continuo **la proprietà degli incrementi** ,osservata nel caso discreto ( in effetti è una diretta conseguenza della proprietà degli esponenti).

**Il tasso di variazione istantaneo**

Sia $y = f(t) = a^t$ una funzione che rappresenta la variazione di un grandezza in funzione del tempo. Vale la proprietà:

**L'incremento $\Delta y$ in un certo intervallo $\Delta t$ è direttamente proporzionale a y**

Infatti

$\frac{\Delta y}{y} = \frac{a^{t+\Delta t} - a^t}{a^t} = \frac{a^t \cdot a^{\Delta t} - a^t}{a^t} = a^{\Delta t} - 1$ - costante per un fissato valore di $\Delta t$

Il rapporto $i = \frac{\Delta y}{y}$, è l'incremento relativo all'intervallo $\Delta t$, a volte espresso in percentuale.

Poiché la crescita avviene con continuità, è lecito pensare a un tasso di variazione istantaneo, che indicheremo con λ, il cui valore può essere determinato se esiste ed è finito $\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta y}{y\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{a^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$, dove $\frac{\Delta y}{y\Delta t}$ è il tasso di variazione medio ,

nell'intervallo $\Delta t$

Tramite il cambiamento di variabile $i = a^{\Delta t} - 1 \to \Delta t = \log_a(i+1)$ , possiamo calcolare

$$\lim_{i\to 0}\frac{i}{\log_a(i+1)} = \lim_{i\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(i+1)}{i}} = \lim_{i\to 0}\frac{1}{\log_a(1+i)^{\frac{1}{i}}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a = \lambda$$

**Esiste un numero reale per cui il tasso di variazione istantaneo è uguale ad 1 , il numero di Nepero, noto come $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, limite "notevole" che si può porre anche nella forma $\lim_{i\to 0}(1+i)^{\frac{1}{i}}$**

Possiamo affermare che

- la funzione $a^t$ rappresenta un modello crescita esponenziale con tasso di variazione istantaneo uguale a $\ln a$
- la funzione esponenziale $e^t$,in base *e ( numero di Nepero)* rappresenta un modello di crescita esponenziale con tasso di variazione istantaneo uguale a 1
- poiché $a^t = e^{t\cdot \ln a}$ ogni fenomeno di crescita esponenziale può essere rappresentato da una funzione del tipo $\boldsymbol{y(t) = y_0 e^{\lambda t}}$ dove $y_0$ è il valore assunto all'istante 0 e $\lambda$ è il tasso di variazione istantaneo.
- Se $\lambda < 0$ si parla di decrescita o decadimento.

Affinché l'esponente sia numero adimensionale, la costante $\lambda$ deve avere le **dimensioni dell'inverso di un tempo, ossia di una frequenza.**
**Il tasso di variazione istantaneo rappresenta "quante volte" la grandezza si accresce di un fattore $\ll e \gg$ ( o diminuisce di un fattore $\frac{1}{e}$) nell'unità di tempo.**

Poiché $D[a^t] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{a^{t+\Delta t} - a^t}{\Delta t} = a^t \lim_{\Delta t\to 0}\frac{a^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = a^t \cdot \lambda$ , possiamo affermare che

**il tasso di variazione istantaneo è il rapporto costante tra la derivata della funzione esponenziale e la funzione stessa $\boldsymbol{\lambda = \frac{f'(t)}{f(t)}}$**

Questa proprietà caratterizza la funzione esponenziale.

Imponendola si perviene all' equazione differenziale

$$f'(x) = \lambda f(x)$$

le cui soluzioni sono espresse nella forma $f(x) = Ce^{\lambda x}$

**Interpretazione geometrica**

**Indipendenza, dal punto di tangenza, della sottotangente**

Sia $y = f(x) = a^x$ l'equazione di una curva esponenziale e $P\ (x_0; a^{x_0})$ un suo punto . Le due rette passanti per P , la tangente al grafico e la parallela all'asse y, incontrano l'asse x nei punti $A$ e $B$, rispettivamente .

Il segmento $AB$ è la **sottotangente** ; la sua lunghezza non varia al variare di P sulla curva e coincide, a meno del segno, con il reciproco del tasso di variazione istantaneo, come si può dimostrare nel modo seguente:

Il rapporto $\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \tan\alpha$ corrisponde a $f'(x_0) = a^{x_0}\ln a$

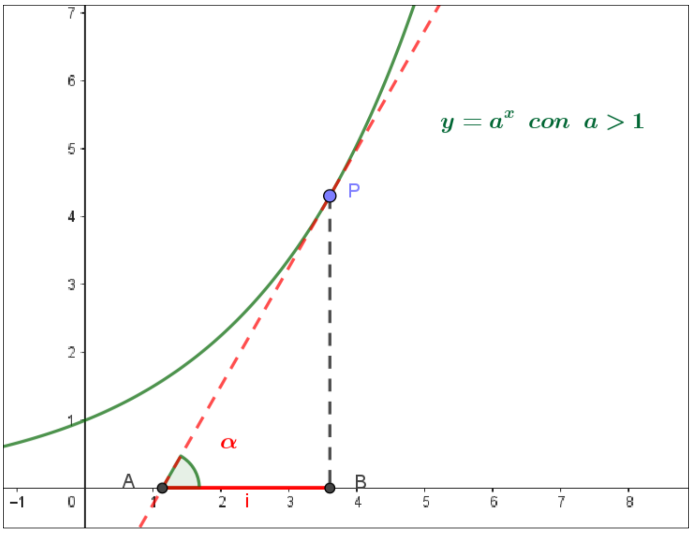
L'equazione della retta tangente è $y - a^{x_0} = f'(x_0)\,(x - x_0) \rightarrow$

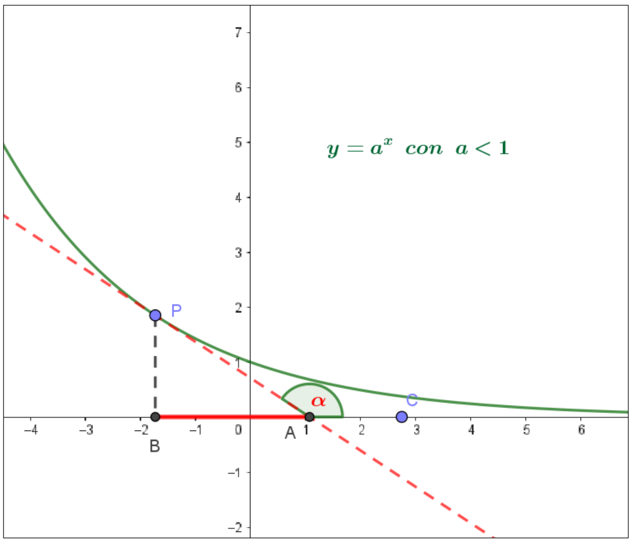
$$y - a^{x_0} = a^{x_0} \cdot \ln a \cdot (x - x_0)$$

Il segmento AB avrà per estremi $B(x_0; 0)$ $e$ $A\left(x_0 - \frac{1}{\ln a}; 0\right)$.

Pertanto, $\overline{AB} = \frac{1}{|\ln a|} = \frac{1}{|\lambda|}$ dipende solo dal valore della base $a$ e non dal punto scelto sulla curva. Geometricamente

$$|\boldsymbol{\lambda}| = \frac{|f'(x)|}{f(x)} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \cdot \frac{1}{\overline{BP}} = \frac{1}{\overline{AB}}$$




## La costante di tempo

Il valore costante di $\overline{AB} = \frac{1}{|\ln a|} = \frac{1}{|\lambda|}$ ha le dimensioni di un tempo , viene indicato con $\tau$ e prende il nome di tempo caratteristico o costante di tempo.

La funzione $y_0 e^{\lambda t}$ può essere scritta, pertanto, nella forma $yo\ e^{\frac{t}{\tau}}$ (crescita) oppure $yo\ e^{-\frac{t}{\tau}}$ (decadimento)

**Il significato fisico di $\tau$ è : il tempo necessario affinché la grandezza assuma un valore pari a "*e volte*" il valore iniziale.**

La costante di tempo assume un importante significato fisico nei fenomeni dipendenti dal tempo e descritti da un modello esponenziale del tipo

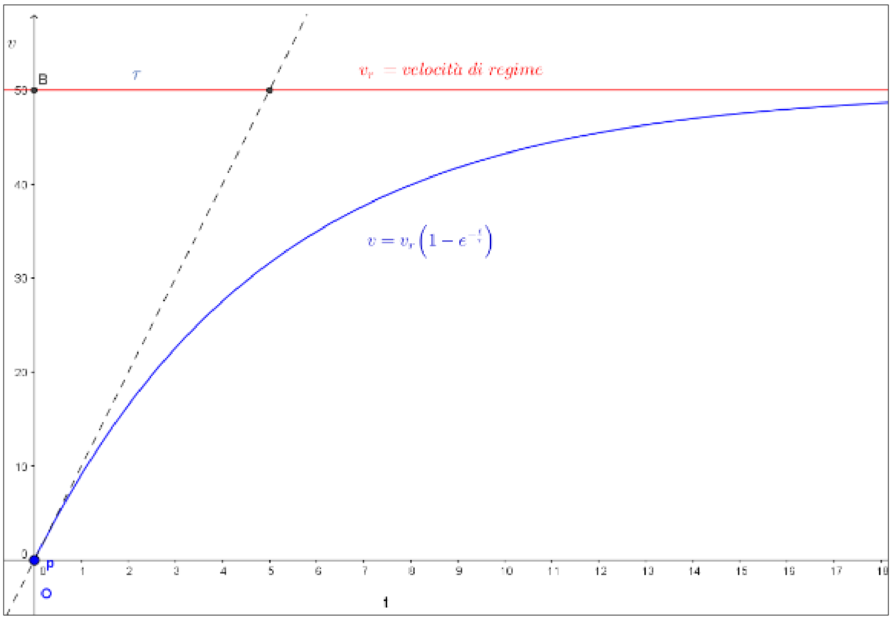
$$y = yo\ e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{oppure} \quad y = yo\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)..$$

La costante $\tau$ permette di stimare la durata di un processo di decadimento o di una fase transitoria (circa 5 $\tau$), in quanto $e^{-\frac{\tau}{\tau}} = e^{-1} \cong 0{,}37$ mentre $e^{-5} \cong 0{,}007$.

Per esempio, nel caso del decadimento radioattivo rappresenta la Vita media di un campione .

Nei cosiddetti fenomeni transitori , come

- Carica e scarica del condensatore
- Extracorrente di chiusura e di apertura
- Riscaldamento e raffreddamento
- Caduta di un grave in un mezzo viscoso




.

Velocità di caduta in mezzo viscoso

Osservazione : il grafico della funzione $y = yo\ e^{-\frac{t}{\tau}}$ si può ottenere da una curva esponenziale mediante un ribaltamento e una traslazione