1) Un problema di crescita esponenziale . Modello discreto o modello continuo?

Quesito 5- Europa 2015.
La popolazione di una colonia di batteri è di 4000 batteri al tempo t = 0 e di 6500 al tempo t = 3. Si suppone che la crescita della popolazione sia esponenziale, rappresentabile, cioè, con l'equazione differenziale $\frac{dy}{dt} = ky$, dove k è una costante e y la popolazione di batteri al tempo t. Al tempo t = 10, la popolazione supererà i 20000 batteri?

Alcune semplici attività di laboratorio potrebbero partire delle seguenti domande poste allo studente

A) **Si può riscontrare una ridondanza nella duplice informazione <<La crescita è esponenziale e rappresentabile con l'equazione differenziale $\frac{dy}{dt} = ky$? E' possibile rispondere al quesito utilizzando una sola delle due affermazioni?**
B) **Qual è il significato fisico della costante k che compare nell'equazione differenziale? Se ne può determinare il valore a prescindere dall'equazione differenziale? Sai indicarne anche un significato geometrico?**

A) **La prima questione** suggerisce la costruzione di due separate catene deduttive per rispondere al quesito. Quella che parte dalla risoluzione dell'equazione differenziale (peraltro molto semplice e sicuramente nota agli studenti) appare come la scelta più adatta e senz'altro esaustiva. Un'analisi più approfondita ci svela un legame imprescindibile con l'altra informazione che è legata all'importante proprietà della crescita esponenziale: ad intervalli di tempo uguali corrispondono incrementi proporzionali al valore attuale.
Si può ricostruire il processo che porta a definire la legge matematica che modella la crescita esponenziale, con l'antico metodo del confronto tra una progressione geometrica e la progressione aritmetica degli esponenti.

Modello discreto

Se la crescita dei batteri è di tipo esponenziale, possiamo costruire un modello discreto e trovare la risposta al quesito con metodi elementari che sfruttano le nozioni di progressione geometrica e di radice ennesima.
Determinato, infatti, il tasso di crescita relativo all'intervallo di tempo uguale a 3 $i = \frac{\Delta y}{y} = \frac{6500-4000}{400} = \frac{2500}{4000} = \frac{5}{8}$, la proprietà degli incrementi si traduce nella costruzione ricorsiva di una progressione geometrica il cui termine generale è

$\boldsymbol{y_n = 4000\left(1+\frac{5}{8}\right)^n = 4000\left(\frac{13}{8}\right)^n}$ dove la variabile intera $n \geq 0$ indica il numero di intervalli di ampiezza uguale a 3.

Numero di batteri	y_0	$y_0(1+i)$	$y_0(1+i)^2$	$y_0(1+i)^3$	$y_0(1+i)^4$
Numero di $\Delta t = 3$	0	1	2	3	4

Poiché il valore assunto al tempo $t = 10$ è compreso tra $4000\left(\frac{13}{8}\right)^3 = 17164$ *e* $4000\left(\frac{13}{8}\right)^4 = 69729$, non abbiamo elementi sufficienti per stabilire se il numero dei batteri è superiore o inferiore a 20000.

La seconda informazione ci assicura, peraltro, che la crescita dei batteri deve essere rappresentata da una funzione derivabile, quindi continua, e non,ad esempio, da una funzione costante a tratti, (in tal caso sarebbe $y(10) = y(9)$).

Senza risolvere l'equazione differenziale possiamo, però, inserire dei medi all'interno di ciascun intervallo , in modo da studiare il fenomeno a intervalli di tempo unitari e modificare la tabella nel modo seguente.

Numero di batteri	$y_0(1+z)^9$	$y_0(1+z)^{10}$	$y_0(1+z)^{11}$	$y_0(1+z)^{12}$
Numero di intervalli di tempo unitari	9	10	11	12

Nella progressione aritmetica sono stati inseriti due medi e nella progressione geometrica abbiamo introdotto la base $(1+z)$ dove z è il **tasso di variazione unitario** , da determinare mediante la relazione

$$\boldsymbol{y_0(1+z)^3 = y_0(1+i)^1 = \frac{13}{8}\,y_0 \rightarrow (1+z) = (1+i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{13}{8}}}$$

$$\boldsymbol{z = \sqrt[3]{\frac{13}{8}} - 1}$$

Possiamo, in alternativa, lasciare la stessa base e introdurre gli esponenti frazionari

Numero di batteri	$y_0(1+i)^3$	$y_0(1+i)^{\frac{10}{3}}$	$y_0(1+i)^{\frac{11}{3}}$	$y_0(1+i)^{\frac{12}{3}}$
Numero di $\Delta t = 3$	3	$3+\frac{1}{3}$	$3+\frac{2}{3}$	4

Pertanto , $\boldsymbol{y_0(1+z)^{10} = y_0\left(\sqrt[3]{\frac{13}{8}}\right)^{10} = y_0\left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{10}{3}} \approx 5.04 \cdot y_0 > 20000}$

Modello continuo.

Risolvendo l'equazione differenziale troviamo una famiglia di funzioni del tipo $y(t) = y_0\ e^{kt}$, dove k rappresenta il rapporto $\frac{y\prime(t)}{y(t)}$.Le informazioni che permettono di determinare le due costanti provengono , però, dal modello discreto: il valore iniziale e il valore misurato dopo un intervallo di tempo uguale a 3.

Nel testo si afferma che la derivata $y'(t)$ è direttamente proporzionale a $y(t) \rightarrow y'(t) = ky(t)$

Una funzione che soddisfa la precedente relazione è la funzione $y = costante = 0$, funzione ovviamente non accettabile poiché non rispecchia il modello di crescita che stiamo considerando

Trascurando la soluzione "$y(t) = 0$" , possiamo scrivere

$$\int_0^t \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_0^t k\ dt \quad \rightarrow \ln(y(t)) - \ln(y(0)) = kt \rightarrow \ln\frac{(y(t))}{(y(0))} = kt \rightarrow \ln\frac{(y(t))}{4000} = kt$$

La funzione logaritmica è invertibile e la funzione inversa è $y = 4000\ \ e^{kt}$

Imponendo la condizione $y(3) = 6500$ *si può determinare il valore della costante k*

$$y(3) = 6500 \rightarrow \ 4000\ \ e^{3k} = 6500 \rightarrow k = \frac{\ln\frac{13}{8}}{3} = \ln\sqrt[3]{\frac{13}{8}}$$

Sostituendo a t il valore 10, nella funzione $y(t) = 4000\left(e^{\ln\sqrt[3]{\frac{13}{8}}}\right)^t$, si ottiene

$$\boldsymbol{y(10) = \ 4000\left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{10}{3}} > 20000.}$$

Le tre possibili formulazioni

$$y_0(1+z)^t \ = y_0\left(\sqrt[3]{\frac{13}{8}}\right)^{10} \qquad y_0(1+i)^{\frac{t}{3}} = \ y_0\left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{t}{3}} \qquad y_0\ e^{kt} = y_0\ e^{e^{\ln\sqrt[3]{\frac{13}{8}}}\ t}$$

rappresentano la stessa legge di crescita.

Matematicamente si tratta solo di un cambiamento di base. Dal punto di vista fisico rappresenta la scelta di studiare il fenomeno esponenziale secondo intervalli di tempo unitari, secondo intervalli di tempo uguali a 3, oppure nell'evolversi istante per istante.

Qualunque sia la scelta, si devono imporre le condizioni assegnate

$$y(0) = 4000 \qquad y(3) = 6500$$

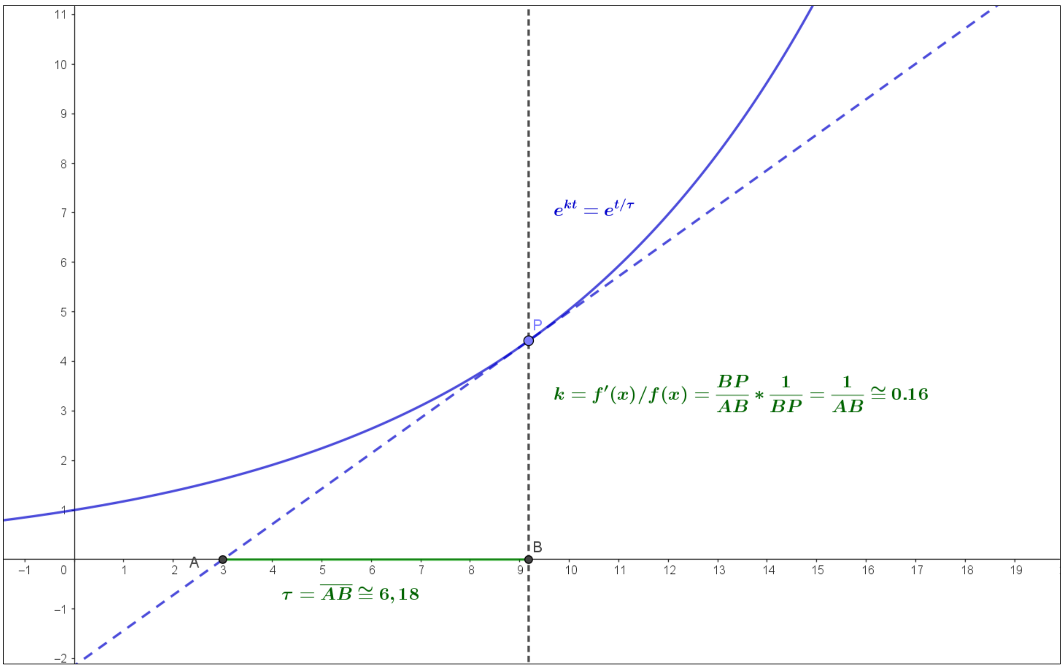
che rendono equivalenti le tre formulazioni.

B) La seconda questione, richiama l'attenzione sul tasso di variazione istantaneo che coincide col rapporto costante $k = \frac{y\prime(t)}{y(t)}$ e sulle proprietà della sottotangente a una curva esponenziale, concetti indispensabili per comprendere le caratteristiche dei modelli esponenziali .

La costante k ha le dimensioni dell'inverso di un tempo ed è positiva, trattandosi di un crescita.

Introducendo la costante $\tau = \frac{1}{k}$, la funzione $y_0\, e^{kt}$ può essere espressa anche nella forma $y_0\, e^{\frac{t}{\tau}}$.

La costante τ ha le dimensioni di un tempo , prende il nome di tempo caratteristico o costante di tempo e indica il tempo necessario affinché il numero dei batteri cresca di un fattore uguale ad "e". Ha anche un interessante significato geometrico poiché il suo valore coincide con la lunghezza della sottotangente: $\tau = \frac{1}{k} \cong 6,18$



Abbiamo osservato, nel punto A, come si possa rispondere al quesito utilizzando

il tasso variazione relativo ad un intervallo di tempo uguale a 3 e il tasso di variazione unitario.

Poichè la nostra percezione del tempo è , comunque, quella di una variabile "continua", è spontanea la ricerca di un tasso di variazione istantaneo che non può che essere il risultato di un limite.

Partendo da una delle leggi determinate nel modello discreto, definiamo il tasso di variazione istantaneo come il limite del tasso di variazione medio in un intervallo

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{y\Delta t}$$

Sia, trascurando per semplicità la costante y_0 , a^t=$(1+i)^{\frac{t}{3}}$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{y\cdot\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{a^{t+\Delta t}-a^t}{a^t\cdot\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{a^t\cdot a^{\Delta t}-a^{\Delta t}}{a^t\cdot\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{a^{\Delta t}-1}{\Delta t} = \ln a$$

Pertanto, $k = \ln a = \ln(1+i)^{\frac{1}{3}}$=$\ln\left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

Avremmo trovato lo stesso risultato partendo dalla legge $y_0(1+z)^t$.

Osservazione

E' noto che il risultato $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{a^{\Delta t}-1}{\Delta t} = \ln a$ è conseguenza del limite notevole

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, risultato che segna il passaggio dal confronto delle due progressioni al modello continuo e ai metodi dell'analisi.