Soluzione di Adriana Lanza

Simulazione della seconda prova di Fisica per gli esami di stato liceo scientifico
a.s. 2015-2016 – 25 gennaio 2016
Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta e tre quesiti a sua scelta
Tempo massimo assegnato alla prova sei ore

Problema n. 2: Uno strumento rinnovato

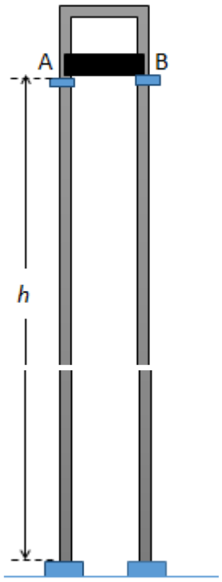


Figura 1

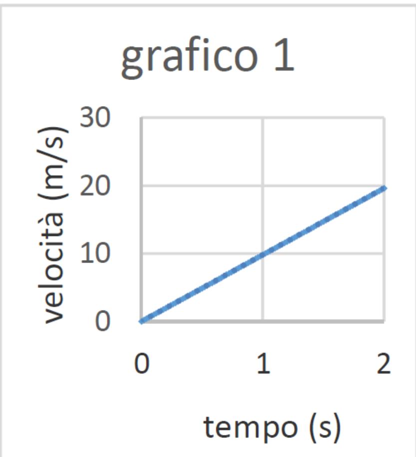
Nel laboratorio di Fisica, durante una lezione sul magnetismo, scorgi in un angolo un vecchio strumento che avevi utilizzato qualche anno fa per lo studio del moto uniformemente accelerato (Fig. 1):

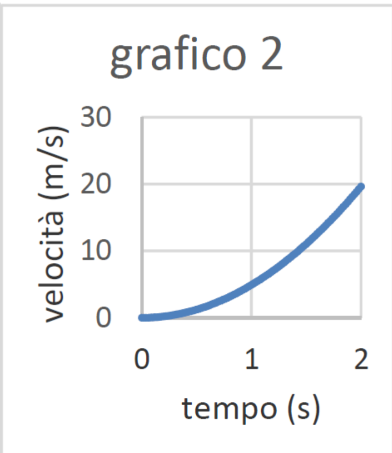
una barretta metallica poggia su due blocchi A e B ancorati ad una guida ad U anch'essa metallica; la guida si trova su un piano perpendicolare al pavimento con il quale è in contatto attraverso due piedini di materiale isolante. La barretta si trova ad un'altezza h dal pavimento e, una volta eliminati i blocchi, scivola verso il basso lungo i binari della guida con attrito trascurabile.
Pensando a ciò che hai studiato recentemente ti viene in mente di utilizzare lo strumento per effettuare misure in campi magnetici. Immagini così di immergere completamente lo strumento in un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano della guida.

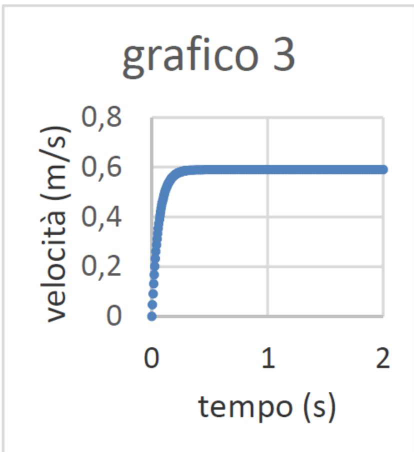
In questa condizione:

1. Rappresenta ed esamina la nuova situazione descrivendo i fenomeni fisici coinvolti e le forze alle quali è sottoposta la barretta durante il suo moto verso il basso.

2. Individua quale tra i seguenti grafici rappresenta l'andamento nel tempo della velocità della barretta giustificando la scelta fatta.







3. Calcola il valore v_{MAX} della velocità massima della barretta assumendo per essa una massa pari a 30 g, una lunghezza di 40 cm, una resistenza elettrica di 2,0 Ω (supponi trascurabile la resistenza elettrica della guida ad U) ed un campo magnetico applicato di intensità 2,5T.

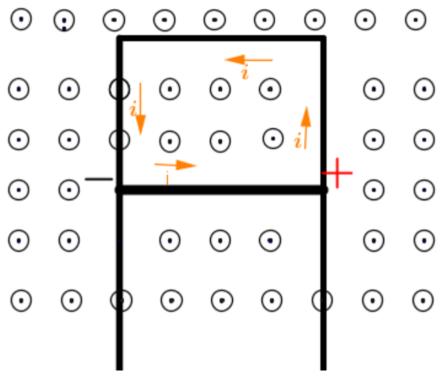
4. Determina l'equazione che descrive il moto della barretta e verifica che la funzione $v(t) = v_{MAX}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, con $\tau = \frac{v_{MAX}}{g}$, ne è soluzione; definisci il significato dei simboli presenti nella funzione servendoti, eventualmente, di un grafico.

Soluzione

1. **Fenomeni fisici coinvolti**

- Moto di un grave nel campo gravitazionale terrestre
- Forza elettromotrice indotta alle estremità di un conduttore rettilineo in un campo magnetico uniforme
- Passaggio di corrente in un circuito chiuso
- Azione di un campo magnetico su un conduttore percorso da corrente

Gli elettroni di conduzione della barretta, in moto e in presenza del campo magnetico, sono soggetti alla forza di Lorentz, di modulo evB, e si sposteranno verso un estremo, mentre nell'altro estremo comparirà una carica positiva, come in figura a lato.



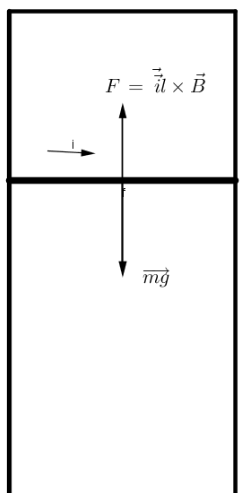
All'interno della conduttore un campo elettrico di intensità vB si oppone alla separazione delle cariche e compie lavoro pe unità di carica pari a vBl, essendo l la lunghezza della barretta

Si genera, fra l'estremo positivo e l'estremo negativo della barretta, una differenza di potenziale $\Delta V = vBl$.

La barretta e la guida ad U costituiscono un circuito chiuso di resistenza R e in esso circolerà una corrente di intensità

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{Bvl}}{\boldsymbol{R}}$$

Il verso della corrente, nel caso rappresentato in figura, è antiorario, tale cioè tale da generare un campo magnetico di verso opposto a $\vec{B}$, in accordo con la legge di Lenz.



Sul conduttore, percorso da corrente agirà allora una forza magnetica di intensità $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ilB} = \frac{\boldsymbol{B^2 l^2 v}}{\boldsymbol{R}}$, diretta come in figura, quindi di verso opposto alla forza di gravità.

Il fenomeno presenta un'analogia con la caduta di un grave in presenza di una resistenza del mezzo proporzionale alla velocità.

Forze applicate alla barretta

Forza peso di intensità mg diretta verticalmente verso il basso

Forza elettromagnetica di intensità $ilB = \frac{l^2B^2v}{R}$ diretta verticalmente verso il basso

2. Analizziamo i tre grafici:

- il primo è un segmento di retta e rappresenta la velocità in un moto ad accelerazione costante
- il secondo rappresenta una funzione crescente con concavità verso l'alto (derivata seconda positiva) , pertanto indicherebbe che l'accelerazione è crescente
- Il terzo rappresenta una funzione crescente la cui derivata però è decrescente e tende a 0, pertanto indicherebbe che l'accelerazione è decrescente.

La barretta , sotto azione delle due forze , si muove con accelerazione $a = g - \frac{B^2l^2v}{mR}$, inizialmente uguale a quella di gravità e poi decrescente,al crescere della velocità

Il grafico che rappresenta *(può rappresentare)* l'andamento nel tempo della velocità della barretta è quindi il **numero 3**

3. La velocità non può superare il valore $\frac{mRg}{B^2l^2}$ in corrispondenza del quale l'accelerazione è uguale a 0.

Infatti quando la forza elettromagnetica uguaglia la forza peso e il moto diviene uniforme , la velocità non varia e di conseguenza non varia neanche la forza elettrica.

La risultante delle forze rimane pertanto nulla.

Il valore $v = \frac{mRg}{B^2l^2}$ è la velocità di regime o velocità limite che assumiamo come velocità massima

Sostituendo i valori assegnati troviamo nella relazione

$$v_{max} = \frac{6 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-2}}{6{,}25\ 16 \cdot 10^{-2}} \ \frac{m}{s} \cong 0{,}59\ \frac{m}{s}$$

4. Applicando alla massa m il secondo principio della dinamica si ottiene

$$ma = mg - \frac{B^2l^2v}{R} \qquad \text{ovvero}$$

$$m \cdot v'(t) = mg - \frac{B^2l^2v(t)}{R}$$

Sostituendo nell'equazione

$$v(t) = v_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad v'(t) = \frac{1}{\tau}v_{max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

si ottiene

$$-m\frac{1}{\tau}v_{max} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = mg - \frac{B^2l^2}{R}v_{max} + \frac{B^2l^2}{R}v_{max}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$$

sostituendo i valori $\tau = \frac{v_{max}}{g}$ $\quad v_{max} = \frac{mRg}{B^2l^2}$

$$m\frac{g}{v_{max}}v_{max}\cdot e^{-\frac{g}{v_{max}}t} = mg - \frac{B^2l^2}{R}\;\frac{mRg}{B^2l^2} + \;\frac{B^2l^2}{R}\frac{mRg}{B^2l^2}\cdot e^{-\frac{g}{v_{max}}t} \quad \rightarrow$$

$mg\cdot e^{-\frac{g}{v_{max}}t} = mg - mg + \; mg\cdot e^{-\frac{g}{v_{max}}t}$ che si riduce all'identità

$$mg\cdot e^{-\frac{g}{v_{max}}t} = mg\cdot e^{-\frac{g}{v_{max}}t}$$

Consideriamo la funzione $v = v_{max}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ la cui derivata è $v'(t) = v_{max}e^{-\frac{t}{\tau}}$

E' una funzione crescente che tende asintoticamente al valore $v = v_{max}$, essendo

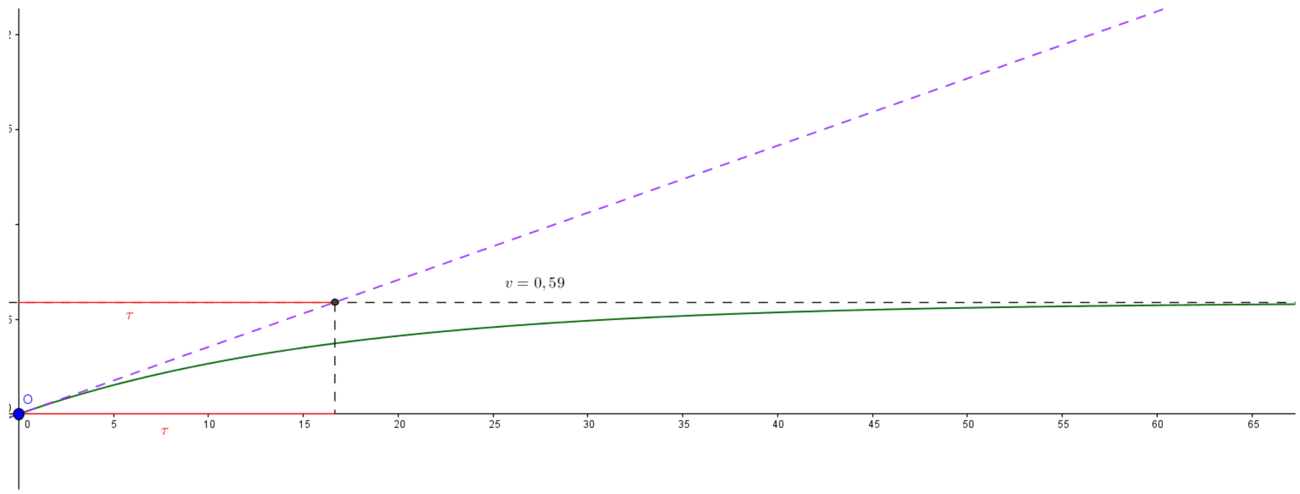
$$\lim_{x\to+\infty} v(t) = v_{max}$$

Sostituendo ai simboli i valori numerici troviamo $\tau = \frac{v_{max}}{g} \cong 16{,}7\; s$

$$\frac{1}{\tau} \cong 0{,}06\; s^{-1}$$

$$v(t) = 0{,}59(1 - e^{-0{,}06\,t}$$

Grafico



Significato dei simboli

Significato geometrico

$v = v_{max}$ è l'asintoto orizzontale

τ corrisponde alla sottotangente relativa all'asintoto orizzontale

Significato geometrico

v_{max} è la velocità limite o di regime.

Teoricamente v non assume mai il valore v_{max} ma , in buona approssimazione, si può dire che dopo un tempo sufficientemente lungo $v = costante = v_{max}$

τ è la costante di tempo , rappresenta l'intervallo di tempo necessario affinché v si discosti da da v_{max}

v_{max} - v $= \frac{1}{e}\, v_{max} \cong 37\%\ del\ valore\ di\ regime$