Riferimenti storici

La regola degli esponenti

Il concetto di progressione geometrica si riconosce già in alcuni problemi degli Egizi e dei Babilonesi (problemi legati alla vita quotidiana) e trova nel pensiero matematico greco un impianto teorico all'interno della teoria delle proporzioni.

Archimede , nell'Arenario ,mette in evidenza la relazione esistente tra i termini di una progressione geometrica, formata dalle successive potenze di un numero naturale, e i relativi esponenti che sono in progressione aritmetica, mentre negli elementi di Euclide si trova un enunciato generale equivalente all'importante " regola degli esponenti"; $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Archimede dimostra anche, tramite una successione di proporzioni continue, che per calcolare il prodotto, oppure il quoziente, tra due potenze basta sommare, o sottrarre, i corrispondenti esponenti e leggere il risultato in corrispondenza di detta somma, o differenza.

I termini di una progressione geometrica possono essere determinati, quando siano noti il primo termine a_1 e la ragione q, tramite un algoritmo ricorsivo

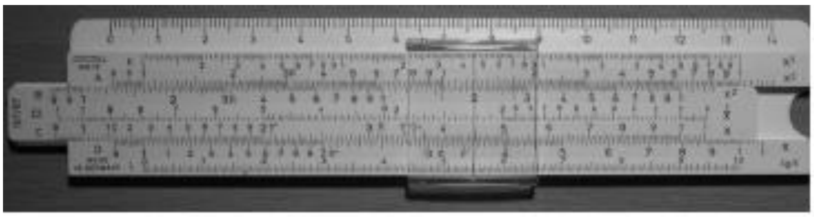
$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Se q è maggiore di 1, il valore di a cresce prima lentamente e poi sempre più velocemente.
E' questa la caratteristica della crescita esponenziale, che dal modello discreto, viene esteso al modello continuo (assieme alla proprietà degli esponenti):
Ad ogni passo l'incremento cresce proporzionalmente al valore attuale

I logaritmi

Nepero (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614), grazie alle relazioni tra i termini di una progressione geometrica e i relativi esponenti, trova un metodo per facilitare le operazioni di calcolo in trigonometria sferica e astronomia, trasformando i prodotti in somme, le divisioni in sottrazioni e l'estrazione di radice in divisioni (con l'invenzione dei logaritmi e la compilazione delle prime tabulazioni).

Il vecchio regolo calcolatore , che sfruttava le stesse proprietà, è stato utilizzato per circa tre secoli fino all'avvento delle calcolatrici elettroniche



Nepero introdusse ,per ogni numero N , la scrittura $N = 10^7(1-10^{-7})^L$ e chiamò il numero L <<logaritmo>> di N.

Utilizzando come base delle potenze successive un numero molto prossimo ad uno, riusciva a distanziare di poco una potenza dall'altra e, poiché le tavole trigonometriche riportavano i valori dei seni fino a 7 cifre decimali, scelse per base il numero 0,9999999, cioè $1-10^{-7}$, moltiplicando poi il risultato per 10^7.

La scrittura $\frac{N}{10^7} = \left[(1-10^{-7})^{10^7}\right]^{\frac{L}{10^7}}$ rivela la presenza di un'approssimazione del numero $\frac{1}{e}$ nel termine $(1-10^{-7})^{10^7}$.

Nepero, quindi, si era avvicinato alla scoperta di un numero che, un secolo più tardi, sarebbe stato riconosciuto come base universale dei logaritmi e che avrebbe giocato in matematica un ruolo importante, secondo soltanto a π.

Il numero *e*, come $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, attirò l'attenzione di molti matematici del XVII e del XVIII.

Come è facile osservare, si incontra la precedente successione nei modelli di crescita esponenziale, in particolare in matematica finanziaria nei problemi di capitalizzazione composta, oggetto di studio già nel periodo rinascimentale.

La capitalizzazione composta e il numero *e*

Luca Pacioli (*Tractatus de computis et scripturis,1494*), prima che fossero stati introdotti i logaritmi naturali, trova una soluzione approssimata del problema del raddoppio del capitale in regime di interesse composto ed enuncia una regola pratica , la regola del 70 o del 72: << *Esempio: Quando l'interesse è a 6 per cento l'anno, dico che si parta 72 per 6 ; ne vien 12 e in 12 anni sarà raddoppiato il capitale.'.*>>
La "Regola del Pacioli" compare ancora in qualche manuale di matematica finanziaria del primo '900 , corretta , per una migliore approssimazione, a $\frac{70}{ì}$

Risolvendo in R l'equazione $C_0(1+i)^n = 2\,C_0 \to C_0\; n\; ln(1+i) = C_0\; ln\,2$ *troviamo, come tempo di raddoppio* $= \tau = n = \frac{ln\,2}{ln(1+i\,)} \cong \frac{0.693}{0{,}058} \cong 11{,}89\; anni$

Confronto con la regola pratica $\frac{70}{6} \cong \frac{100\,ln\,2}{100\,i} = \frac{ln\,2}{ì}$

Osserviamo che il numero 70 è un valore approssimato di $100 \cdot ln\,2$, *mentre il valore* $100i$ *approssima la quantità* $100 \cdot ln(1+i)$

I progressi della matematica nel campo dell'analisi fornirono nei secoli seguenti, gli strumenti necessari per migliorare i risultati in ambito applicativo, i quali, d'altronde, fornivano l'occasione per raffinarne l'apparato concettuale.

Nel passare a un modello continuo della capitalizzazione composta, si incontra la successione $C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$, suddividendo il periodo di 1 anno in parti uguali, frazionando anche il tasso di interesse e calcolando il montante all'inizio di ciascun periodo. Per arrivare a un tasso di interesse istantaneo non resta calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$.

Nel risolvere i problemi di interesse composto Jacob Bernoulli , nel 1683,fu tra i primi a trovare un'approssimazione del numero <<e>> applicando il Teorema del Binomio $(x+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k a^{n-k}$

Più tardi Eulero dimostra che $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ e ne determina un'approssimazione fino alla diciottesima cifra decimale

Lo stesso Eulero, a cui si deve la scelta del nome e, ne dimostrò l'irrazionalità (1737) .
Si deve invece ad Hermite , nel 1873, la prova della trascendenza.

La funzione esponenziale e le sue definizioni

Grazie agli sviluppi dell'Analisi, nei secoli successivi, con i contributi soprattutto di Eulero e dei fratelli Bernouilli, si arrivò alla definizione di una funzione continua che possa modellare la crescita o il decadimento esponenziale.

Eulero definì la funzione esponenziale e la funzione logaritmica nei termini:

$$e^x=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\qquad \ln x=\lim_{n\to+\infty}n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

Una definizione alternativa della funzione esponenziale, come funzione inversa della funzione logaritmica, è suggerita dall'opera del matematico gesuita Grégoire de Saint-Vincent .
Dedicandosi alla quadratura dell'iperbole (Opus Geometricum" 1647), egli trovò che
« Se le ascisse di un'iperbole equilatera crescono in progressione geometrica, le aree delle regioni piane delimitate dall'iperbole e dalle corrispondenti ordinate crescono in progressione aritmetica» .
L'area sottesa da un arco di iperbole sull'intervallo $[1,x]$ corrisponde quindi al logaritmo di x, la cui base può essere determinata individuando l'intervallo in corrispondenza del quale l'area è uguale a 1.

Si può notare che resta definita una funzione $L : R^+ \to R \quad L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, invertibile, tale che $L(\alpha \cdot \beta) = L(\alpha) + L(\beta)$, la cui inversa è la funzione esponenziale.
L'idea di Grégoire de Saint-Vincent fu ripresa da Vincenzo Riccati che nella sua opera "Opuscola ad res Phyisicas et Mathematicas pertinentes " (1757) fondò la teoria dei logaritmi sulle proprietà dell'iperbole equilatera e venne riproposta da Felix Klein (Matematica Elementare dal punto di vista superiore).

Il saldo legame con il concetto di logaritmo, che le individua come l'una l'inversa dell'altra, mantiene viva l'attenzione sulla proprietà di trasformare prodotti in somme e viceversa.
Le proprietà

$$\text{a) } \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \qquad b)\ e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

caratterizzano le due funzioni.
Il linguaggio dell'Algebra moderna permette di esprimere in modo semplice ed elegante questa importante proprietà introducendo la funzione esponenziale come un **omomorfismo** continuo della struttura additiva dei numeri reali nella struttura moltiplicativa dei numeri reali positivi (viceversa per il logaritmo).