Attività N. 2.

Terne o quaterne di punti a due a due equidistanti

Nel riferimento cartesiano $Oxyz$ precedentemente introdotto, ,si determinino tre punti A,B,C appartenenti ad un piano α parallelo al piano xy,in modo che il triangolo da essi determinato risulti equilatero .

Esiste, internamente alla superficie sferica S, un quarto punto D tale che i quattro punti A, B, C, D siano a due a due equidistanti?

Se l'equazione del piano α è $z = d$, una volta determinato il raggio

$r = \sqrt{R^2 - d^2}$ della circonferenza Γ circoscritta al triangolo equilatero, la costruzione del triangolo diventa un problema di geometria piana di facile risoluzione.

Per quanto riguarda la seconda richiesta, osserviamo che nell'ambiente "piano" la risposta è sicuramente negativa. Costruito un triangolo equilatero *ABC,* l'unico punto equidistante dai tre vertici è il circocentro G, che però non soddisfa la proprietà richiesta in quanto i segmenti GA,GB, GC ,tra loro congruenti , non lo sono ai lati del triangolo.

Nello spazio, invece, il punto D esiste ed è il quarto vertice di un tetraedro regolare di base ABC . Il punto appartiene all'asse z ma la sua appartenenza all'interno della superficie sferica dipende dalla posizione del piano di ABC.

L'esplorazione con Geogebra suggerisce che:

se $d = 0$, i vertici dei due tetraedri sono simmetrici rispetto piano α , che coincide col piano xy, e sono entrambi esterni alla sfera.

se $d \neq 0$ uno dei due vertici è interno alla sfera se è verificata la condizione

$|d| \geq \frac{R}{3}$.

Perchè proprio $|d| \geq \frac{R}{3}$?