Misure del cerchio

di Antonino Giambò

1. Una delle cose che ricordo di aver imparato alle scuole elementari e che ho consolidato alla scuola media (a quell'epoca, or sono quasi tre quarti di secolo, si chiamavano così) riguarda l'area del cerchio e la lunghezza del suo contorno, la circonferenza. Ho imparato allora che:

- l'area di un cerchio è uguale a raggio per raggio per $3{,}14$;
- la lunghezza di una circonferenza è uguale al diametro per $3{,}14$ (o, in forma equivalente, al raggio per $6{,}28$).

Più avanti, procedendo negli studi, ho imparato altre cose al riguardo, ma solo quando sono diventato "grande" mi sono reso conto di come stavano realmente le cose.

Ritengo che qualche studente liceale possa essere interessato a sapere e capire come si sia evoluta la questione riguardo a questo argomento ed è quello che mi propongo di fare in questo articolo.

2. Dico subito che il numero $3{,}14$ nasce con il grande scienziato siracusano Archimede (287 cica – 212 a.C.), una delle figure preminenti della Matematica non solo greca ma di tutti i tempi. Vedremo come fra breve.

Intanto, però, anticipo che Archimede è consapevole del fatto che il rapporto fra l'area di un cerchio e il quadrato del suo raggio è uguale al rapporto fra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro.

E non è un fatto banale. Questa consapevolezza, infatti, non c'era stata sempre.

Non c'era, per esempio, né presso gli Egizi né presso i Babilonesi, cioè quei popoli che all'incirca dal 2000 a.C. e comunque molto prima dei Greci, avevano mostrato un buon livello di conoscenze in campo matematico, anche se il loro interesse riguardava la risoluzione di casi specifici, senza alcuna enunciazione di teoremi o di regole generali. E senza la cura di distinguere tra misure esatte e misure approssimate.

In particolare, quelle popolazioni non utilizzavano il valore $3{,}14$ nei loro calcoli, ma valori diversi, quantunque non molto distanti da $3{,}14$, come, per esempio, $3{,}166$ (Egizi) o $3{,}125$ (Babilonesi), per l'area del cerchio.

Addirittura, gli Ebrei del X sec. a.C. usavano un valore molto meno accurato, il valore 3 per la lunghezza della circonferenza

La consapevolezza di cui dicevamo nasce con la matematica greca, in un periodo imprecisato fra il VI e il IV sec. a.C.

La tradizione attribuisce ad Anassagora di Clazomene (V sec. a.C.), filosofo greco, amico e maestro di Pericle, i primi tentativi, peraltro non riusciti, di trovare l'area del cerchio. Secondo quanto riferisce lo storico Plutarco (I-II sec. d.C.) lo avrebbe fatto mentre era in carcere, dove era stato rinchiuso perché accusato di empietà per aver sostenuto che il Sole e la Luna non erano divinità.

«È questa – sostiene Boyer [2, pagg. 75-76] – la prima testimonianza relativa a un problema che doveva affascinare i matematici per più di 2000 anni. Non possediamo altri particolari circa l'origine di tale problema».

Per la verità, il problema di cui si occupava Anassagora non era esattamente quello di trovare l'area del cerchio come lo intendiamo noi, bensì quello di trasformare il cerchio in un quadrato equivalente (*quadratura del cerchio*) e di farlo servendosi esclusivamente di riga (non graduata) e compasso. Problema che, come sarebbe stato dimostrato molti secoli più tardi, è però un problema insolubile.

Dopo Anassagora, altri si cimentarono nella risoluzione del problema e, tra loro, il sofista e matematico Antifonte di Atene (V sec. a.C.) e il matematico Brisone di Eraclea (V sec. a.C.), ma con scarsi risultati.

Chi più di tutti ottenne risultati apprezzabili, ma ancora lontani da quelli sperati, fu Ippocrate di Chio (attivo intorno al 430 a.C.), il quale riuscì a quadrare molte lunule, ma non gli riuscì di giungere alla quadratura del cerchio.

Euclide dimostrò un teorema (*Elementi*, libro XII, proposizione 2) che ha a che fare con la quadratura del cerchio: *I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri*. Ma non andò oltre.

Chi invece per primo, pur senza giungere alla quadratura del cerchio (cosa che sappiamo essere impossibile), ne fornì un'approssimazione accurata fu Archimede. Il procedimento da lui seguito figura in un piccolo trattato dal titolo *Misura del cerchio* [1], contenente esattamente tre proposizioni.

Eccone gli enunciati, esposti con qualche licenza al fine di renderli più aderenti al nostro linguaggio:

- PROPOSIZIONE 1. *Ogni cerchio è equivalente ad un triangolo rettangolo i cui cateti sono uguali al raggio del cerchio e alla sua circonferenza.*
- PROPOSIZIONE 2. *Il cerchio sta al quadrato del diametro come* 11 *sta a* 14.
- PROPOSIZIONE 3. *La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e lo supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi.*

Come annota Attilio Frajese ([1], pag. 215), quest'opera di Archimede non è priva di punti oscuri e c'è il fondato sospetto che quella « a noi giunta non sia l'opera originale di Archimede, ma soltanto un estratto da altra opera più completa ».

Comunque sia, ci soffermiamo su queste tre proposizioni per una loro dimostrazione.

Ma prima di andare alle dimostrazioni, qualche annotazione sulla prima proposizione.

Questa proposizione si ritroverà, in forma un po' diversa ma concettualmente equivalente, in opere di studiosi successivi. Si ritroverà, in particolare, nell'opera *Nova Stereometria Doliorum vinariorum* (1615) dello scienziato tedesco Johann Kepler (italianizzato Giovanni Keplero, 1571-1630). E la si ritroverà, sempre modificata, nell'opera *Elementi di Algebra e Geometria* del matematico fiorentino Vincenzo Brunacci (1768-1818), pubblicata postuma, in una edizione del 1849 curata da altri studiosi, tra i quali il bolognese Cammillo Minarelli (1781-1854), ma già presente in edizioni precedenti.

Passiamo adesso alle dimostrazioni delle tre proposizioni. In particolare, dopo la prima proposizione, ci soffermeremo sulla terza e poi dimostreremo la seconda. Questa infatti si desume dalla terza proposizione: per dire dei "punti oscuri" di cui parla Frajese.

Le dimostrazioni che proporrò non saranno però quelle di Archimede, ma dimostrazioni alternative. Precisamente, la proposizione 1 sarà dimostrata seguendo il procedimento di Keplero e la proposizione 3 sulla base di un'idea del matematico indiano Aryabhata (V sec. d.C.).

Riguardo alla proposizione 2, fornirò invece una dimostrazione sostanzialmente equivalente a quella di Archimede.

3. DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 1.

Prima di andare alla dimostrazione di Keplero, un cenno al procedimento seguito da Archimede.

Considerati il cerchio C e il triangolo rettangolo T, avente per cateti il raggio del cerchio e la sua circonferenza, Archimede, utilizzando il metodo di esaustione inventato da Eudosso di Cnido (IV sec. a.C.) e procedendo perciò per assurdo, dimostra che il cerchio C non può essere né maggiore né minore del triangolo T: deve essere pertanto C=T. Nella dimostrazione Archimede utilizza anche la succitata proposizione 2 del libro XII degli *Elementi* di Euclide.

Passiamo finalmente alla dimostrazione di Keplero che, ad onor del vero, non è altrettanto rigorosa come quella di Archimede.

Considerata, allora, una circonferenza k di centro O e raggio r (figura 1) suddividiamola in n archi di lunghezza uguale L, per cui C=nL. Il cerchio limitato da k risulta così suddiviso in n settori circolari di uguale area S, per cui A=nS.

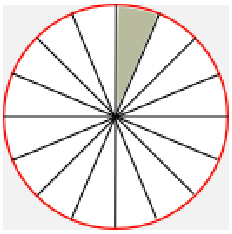

figura 1

Quando il numero n tende a diventare "infinitamente grande", ciascuno dei suddetti archi tende a diventare "infinitamente piccolo", così piccolo che si può confondere con un segmento di retta. In questo modo ognuno dei settori circolari si può assimilare ad un triangolo, avente per base uno di tali archi e per altezza il raggio del cerchio, ragion per cui $S = \frac{1}{2}$ L r. Risulta allora: $A = n \cdot \frac{1}{2}$ L r. E poiché $n\,L = C$, si ha:

$$A = \frac{1}{2} C\, r\,.$$

Questa formula esprime chiaramente l'enunciato della proposizione 1 di Archimede.

Qualche considerazione aggiuntiva.

La formula e quindi anche la proposizione raccontano che, se è nota la lunghezza della circonferenza, è nota pure l'area del cerchio, e viceversa.

Si desume inoltre da essa che, dividendo entrambi i membri per r^2, si ottiene quest'altra uguaglianza:

$$\frac{A}{r^2} = \frac{C}{2\,r}.$$

Questa relazione, a sua volta, racconta un fatto importante: il rapporto fra l'area di un cerchio ed il quadrato del suo raggio ed il rapporto fra la lunghezza della relativa circonferenza ed il diametro sono uguali e tale rapporto non dipende dal cerchio che si considera, ma è invariante al variare del cerchio.

Ora, questa relazione, quantunque importante, rimane fine a se stessa se non si conosce il valore comune del rapporto. Archimede era consapevole di ciò e di fatto la terza proposizione fornisce un valore (approssimato) di questo rapporto.

4. Dimostrazione della proposizione 3.

Il precedente rapporto sarebbe stato indicato, ma molti secoli dopo Archimede, con la lettera "pi greco":

$$\boldsymbol{\pi}.$$

Sulla sua storia mi sono dilungato in un precedente articolo (*Pi greco: una storia affascinante*). Qui mi limito a spiegare come abbia fatto Archimede a trovarne il valore approssimato 3,14.

La proposizione, tradotta nel nostro linguaggio, afferma che la lunghezza C della circonferenza di raggio r è compresa fra i seguenti valori:

$$2r \cdot 3 + \frac{10}{71} \cdot 2r \quad \text{e} \quad 2r \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right)$$

e pertanto, essendo $C = 2\,\pi\,r$, risulta:

$$2r \cdot 3 + \frac{10}{71} \cdot 2r < 2\,\pi\,r < 2r \cdot \left(3 + \frac{1}{7}\right),$$

da cui, dividendo tutto per 2r, segue:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} \quad \text{ossia:} \quad 3{,}1408 < \pi < 3{,}1428\,.$$

Il che assicura che il valore di π, esatto fino al 2° decimale, è per l'appunto 3,14.

Per la sua dimostrazione, Archimede partì da due esagoni regolari, uno inscritto e l'altro circoscritto ad una circonferenza e, raddoppiando per 4 volte il numero dei lati (6·2=12, 12·2=24, 24·2=48, 48·2=96), calcolò i perimetri dei poligoni regolari di 96 lati inscritto e circoscritto alla circonferenza e giunse al risultato suddetto.

Per potere apprezzare appieno la portata dell'opera di Archimede, bisogna ricordare che egli non disponeva di alcun simbolismo algebrico e doveva servirsi di un sistema di numerazione poco efficace, che nulla ha a che vedere con il nostro sistema di numerazione.

La dimostrazione di Archimede è troppo complessa e articolata. Preferisco tralasciarla, ma chi volesse prenderne visione può consultare [1, pagg. 228-231].

Riporto invece una dimostrazione alternativa, ma equivalente, accessibile agli studenti liceali. Essa è in parte dovuta ad Aryabhata, in parte ispirata al suo stesso ragionamento ma con l'utilizzo di strumenti che egli non possedeva. Anche questa dimostrazione ho avuto modo di mostrare in un precedente articolo (*Metodi a confronto per* π), ma ne riporto ugualmente le parti che qui ci interessano.

- Aryabhata dimostra la seguente formula, relativa ai poligoni regolari inscritti nella circonferenza:

$$L_{2n} = \sqrt{0{,}5 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - {L_n}^2}\right)},$$

dove L_n è il lato del poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di diametro 1 ed L_{2n} è il lato del poligono regolare di 2n lati inscritto nella stessa circonferenza. Si parte dall'esagono, per cui n=6 e L_n=0,5.

Andiamo alla dimostrazione.

Nella circonferenza di centro O e diametro 1 sia inscritto un poligono regolare di n lati e sia AB un suo lato, perpendicolare al diametro CD (figura 2). Il segmento AC è evidentemente il lato del poligono regolare di 2n lati inscritto nel cerchio.

Costatiamo per prima cosa che per n=6 si ha $\overline{AB}$=0,5.

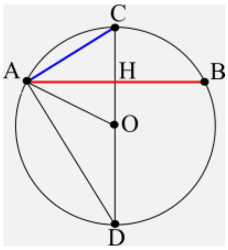

figura 2

In virtù del 1° teorema di Euclide, applicato al triangolo rettangolo CDA, si ha: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{CD} \cdot \overline{CH}}$.

D'altro canto:

$$\overline{CH} = \overline{CO} - \overline{OH} = \overline{CO} - \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \overline{AB}^2}\right).$$

Ora, essendo $\overline{AB}=L_n$, $\overline{AC}=L_{2n}$ e $\overline{CD}$=1, la formula di Aryabhata è dimostrata.

- Esiste una formula analoga a quella di Aryabhata per i poligoni regolari circoscritti e mostro come ottenerla, ma con l'ausilio della Trigonometria. Strumento che né Aryabhata né tantomeno Archimede possedevano e che diventò "adulto" solo dopo il XVI secolo.

Si considera dunque una circonferenza di centro O e diametro 1 (figura 3).

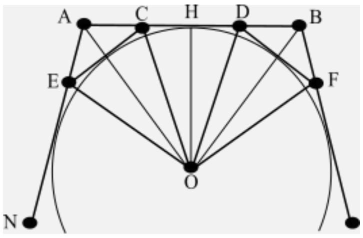

figura 3

Sia AB il lato di un poligono regolare di n lati circoscritto ad essa e sia H il punto di tangenza.

Osserviamo anzitutto che per n=6 si ha $\overline{AB}=\sqrt{3}/3\approx 0{,}57$.

Il segmento CD, simmetrico rispetto ad H e tale che l'angolo $C\hat{O}D$ misuri la metà di $A\hat{O}B$, è il lato di un poligono regolare di 2n lati circoscritto alla circonferenza. Se AN è un altro lato del primo poligono, si spiega che la corda CE di tale poligono, perpendicolare ad OA e tangente alla circonferenza, è un altro lato del secondo poligono.

Si trova facilmente che $CE = 2\ AC \cdot \sin\alpha$, avendo posto $O\hat{A}C=\alpha$.

Inoltre: $\tan\alpha = OH/AH$ ossia, tenendo presente che $\overline{OH}=1/2$, $\tan\alpha = \frac{1}{2\ AH}$.

D'altro canto, essendo $\alpha<90°$, si ha:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\ , \quad \text{per cui, a conti fatti:} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{4\,\overline{AH}^2+1}}.$$

Dunque, siccome AC=AH−CH e, come visto sopra, $CE = 2\ AC \cdot \sin\alpha$, risulta:

$$\overline{CE} = 2 \cdot \left(\overline{AH} - \overline{CH}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{4\,\overline{AH}^2+1}}.$$

Posto adesso $\overline{AB}=K_n$ e $\overline{CE}=K_{2n}$, per cui: $\overline{AH}=K_n/2$ e $\overline{CH}=K_{2n}/2$, si ottiene la seguente equazione nell'incognita K_{2n}:

$$K_{2n} = 2 \cdot \left(\frac{K_n}{2} - \frac{K_{2n}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{{K_n}^2 + 1}} .$$

La quale equazione, dopo alcune elementari elaborazioni, si può mettere nella seguente forma:

$$K_n\, {K_{2n}}^2 + 2\, K_{2n} - K_n = 0 .$$

Una volta risolta quest'equazione e presa la sola radice positiva, si trova:

$$K_{2n} = \frac{\sqrt{1 + {K_n}^2} - 1}{K_n} .$$

Utilizzando la formula di Aryabhata e la formula qui ottenuta, si possono trovare i risultati sintetizzati nella seguente tabella [(1)], i quali danno certezza sui valori approssimati trovati e indicati nell'ultima colonna:

Tabella 1 – Calcolo di π con il metodo di Archimede

Numero n dei lati del poligono regolare	Perimetro del poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio 0,5	Perimetro del poligono regolare di n lati circoscritto ad una circonferenza di raggio 0,5	Valore approssimato di π corretto fino al decimale indicato
6	3	3,4	3
12	3,10	3,21	3
24	3,13	3,15	3,1
48	3,139	3,146	3,1
96	3,1410	3,1427	3,14

Come si può costatare, si ritrova l'approssimazione trovata da Archimede: $\pi \approx 3{,}14$.

5. DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 2.

Questa proposizione, in verità, non aggiunge nulla di veramente significativo alla questione di cui ci stiamo occupando, se non forse il desiderio e la speranza di Archimede di esprimere con un numero razionale il rapporto fra un cerchio e il quadrato del suo diametro, rapporto che poi è uguale a $\pi/4$.

Ecco, dunque, la dimostrazione, eseguita ripetendo, a parte il linguaggio, il procedimento di Archimede.

Si circoscrive al cerchio di diametro AB il quadrato di lato CD; lato che ovviamente è uguale ad AB.

Sul prolungamento di CD, dalla parte di D, si prendono i punti E ed F tali che risulti (figura 4):

$$DE = 2\ CD \quad \text{e} \quad EF = \frac{1}{7}\ CD .$$

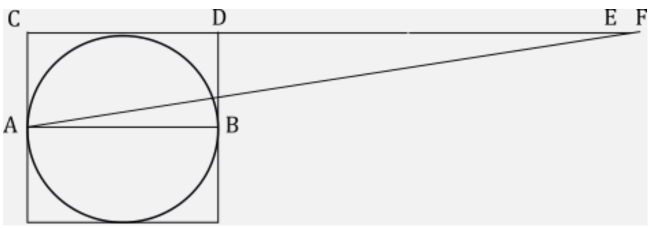

figura 4

Si ha allora:

$$CF = CD + DE + EF = \frac{22}{7}\ CD \quad \text{e quindi} \quad \frac{CF}{CD} = \frac{22}{7} .$$

---

[1] Approfitto per segnalare una svista presente nella tabella 4 dell'articolo *Metodi a confronto per π*: il raggio della circonferenza è ovviamente 0,5 e non 1, come riportato erroneamente in quella tabella.

Tenendo adesso presente che la lunghezza della circonferenza di diametro AB=CD è (approssimativamente), per la proposizione 3 già dimostrata:

$$\left(3+\frac{1}{7}\right)\ \mathrm{CD}=\frac{22}{7}\ \mathrm{CD}\,,$$

possiamo affermare che il segmento CF è lungo (approssimativamente) quanto la circonferenza e, di conseguenza, il triangolo ACF è equivalente (approssimativamente) al cerchio di diametro AB.

Ora, si ha che:

$$\frac{\text{area triangolo ACF}}{\text{area triangolo ACD}}=\frac{\frac{1}{2}\ \mathrm{AC}\cdot\mathrm{CF}}{\frac{1}{2}\ \mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}=\frac{22}{7}\,.$$

In definitiva, ricordando che $\mathrm{CD}=2\ \mathrm{AC}$ e quindi $\mathrm{CD}^2=4\ \mathrm{AC}^2$ e inoltre che l'area del triangolo ACF è uguale all'area del cerchio di diametro AB=CD, si ottiene:

$$\frac{\text{area cerchio di diametro CD}}{\text{area quadrato di lato CD}}=\frac{\frac{1}{2}\ \mathrm{AC}\cdot\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{22}{7}=\frac{11}{14}\,.$$

Ciò che si voleva dimostrare.

Sempre a proposito di "punti oscuri", si sottolinea che la relazione trovata è vera approssimativamente e non esattamente come lascia intendere invece l'enunciato della proposizione stessa.

Ad ogni buon conto, $11/14$ è un modo razionale di rappresentare (in modo approssimato ovviamente) il numero $\pi/4$. Per la cronaca, si ha:

$$\frac{11}{14}\approx 0{,}78571\,,\qquad \frac{\pi}{4}\approx 0{,}78539\,.$$

6. Con il progredire della Matematica e con l'insorgere dell'esigenza di un maggior rigore logico, non solo fu dimostrato che π è un numero irrazionale, addirittura trascendente, e conseguentemente è impossibile la costruzione con i soli strumenti riga e compasso di un quadrato equivalente al cerchio, ma nacquero anche modi più rigorosi di giungere alle formule della lunghezza C della circonferenza e dell'area A del cerchio di dato raggio r, vale a dire alle formule:

$$\mathrm{C}=2\,\pi\,\mathrm{r}\,,\qquad \mathrm{A}=\pi\,\mathrm{r}^2\,.$$

- Uno di questi modi, basato sulla teoria della misura delle grandezze, implica la dimostrazione di alcuni teoremi, dei quali mi limito a fornire gli enunciati:

TEOREMA 1. Le classi formati dai perimetri dei poligoni regolari inscritti e da quelli circoscritti ad una circonferenza sono contigue e come tali ammettono uno ed un solo elemento di separazione, che è la lunghezza della circonferenza.

TEOREMA 2. Il rapporto tra una circonferenza e il suo diametro è un invariante, che si indica con π.

Ossia, indicati con C la lunghezza della circonferenza e con r il suo raggio:

$$\frac{\mathrm{C}}{2\,\mathrm{r}}=\pi\,.$$

TEOREMA 3. Ogni cerchio è equivalente ad un triangolo avente per altezza il raggio e per base la circonferenza rettificata [(2)].

Indicati allora con C la lunghezza della circonferenza, con A l'area del cerchio e con r il raggio, dal teorema 2 segue che $\mathrm{C}=2\,\pi\,\mathrm{r}$, e dal teorema 3, tenendo presente il teorema 2, segue che $\mathrm{A}=\pi\,\mathrm{r}^2$.

- Un altro modo per giungere alle due formule altro non è che la formalizzazione di quel metodo che Keplero aveva proposto a livello intuitivo. Richiede conoscenze elementari di Trigonometria e di Analisi Matematica

Sia allora AB il lato del poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di centro O e raggio r (figura 5).

[2] La proposizione 1 di Archimede è evidentemente un caso particolare di questo teorema.

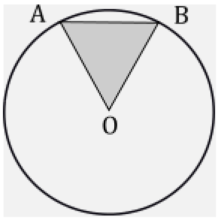

figura 5

Indicata con A_n l'area di questo poligono, è evidente che essa è n volte l'area T_n del triangolo OAB. D'altra parte, costatato che l'angolo $A\hat{O}B$ misura $2\pi/n$, si ha:

$$A_n = n\,T_n = n \cdot \frac{1}{2}\ OA \cdot OB \cdot \sin A\hat{O}B = \frac{1}{2}\ n\,r^2 \sin\frac{2\,\pi}{n}.$$

Considerato che l'area del cerchio può essere concepita come il limite dell'area A_n quando $n\to\infty$, si ottiene:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ n\,r^2 \sin\frac{2\,\pi}{n}\right) = \pi\,r^2 \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\,\pi}{n}}{\frac{2\,\pi}{n}}.$$

Ora, si spiega facilmente che:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\,\pi}{n}}{\frac{2\,\pi}{n}} = 1\,,$$

per cui, in definitiva, si ha: $A = \pi\,r^2$.

Per la lunghezza C della circonferenza si può seguire un procedimento analogo, oppure sfruttare la relazione $A = \frac{1}{2}\ C\,r$ e concludere, in ogni caso, che si ha: $C = 2\,\pi\,r$.

- Un terzo modo è basato sulla Geometria Analitica, la Trigonometria e il Calcolo Integrale.

Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si considera la circonferenza di centro O e raggio r (figura 6). La sua equazione è la seguente: $x^2+y^2=r^2$.

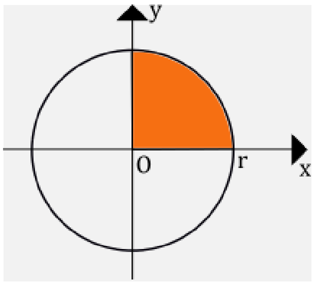

figura 6

Il quarto di cerchio situato nel primo quadrante è definito allora dalle seguenti relazioni:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\,,\quad 0 \le x \le r\ .$$

La sua area, pari alla quarta parte dell'area A del cerchio, è pertanto:

$$\frac{A}{4} = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx\,.$$

Calcolata una primitiva della funzione $\sqrt{r^2 - x^2}$ e appurato che essa è la seguente funzione:

$$\frac{1}{2}\ x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2}\ r^2 \operatorname{asin}\frac{x}{r}\,,$$

si ottiene:

$$\frac{A}{4} = \left[\frac{1}{2}\ x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2}\ r^2 \operatorname{asin}\frac{x}{r}\right]_0^r = \frac{1}{2}\ r^2 \operatorname{asin} 1 = \frac{1}{2}\ r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\,r^2}{4}\,.$$

E perciò: $A = \pi\,r^2$.

Di nuovo, siccome $A = \dfrac{1}{2}\ C\,r$, si ottiene $C = 2\,\pi\,r$.

Ma alla lunghezza della circonferenza si giunge anche direttamente coinvolgendo il Calcolo Integrale. Vediamo come.

Considerato lo stesso cerchio precedente, ci proponiamo di calcolare la lunghezza L dell'arco $\widehat{AB}$ contenuto nel primo quadrante (figura 7), la cui equazione è pertanto:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\,, \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq r\,.$$

Per evidenti ragioni di simmetria, la lunghezza C della circonferenza è $C=4L$.

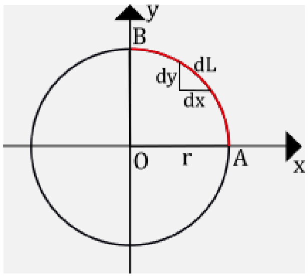

figura 7

Consideriamo la lunghezza dL di un elemento infinitesimale dell'arco. Si ha: $dL^2=dx^2+dy^2$.

D'altro canto, differenziando la funzione, risulta:

$$dL = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx\,.$$

Pertanto:

$$dL^2 = \left(1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}\right) dx^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2}\,dx^2\,.$$

La lunghezza L dell'arco $\widehat{AB}$ è allora la seguente:

$$L = \int_0^r dL = r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = r \cdot \left[\operatorname{asin}\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r = r \cdot \operatorname{asin}(1) = \frac{\pi\, r}{2}.$$

Di conseguenza:

$$C = 4\,L = 4 \cdot \frac{\pi\, r}{2} = 2\,\pi\, r\,.$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] Archimede, *Misura del cerchio*, in *Opere* (di), a cura di Attilio Frajese, Torino, UTET, 1974.

[2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980.

[3] Euclide, *Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Torino, UTET, 1970.

[4] Attilio Frajese, *Attraverso la storia della matematica*, Firenze, Le Monnier, 1971.

[5] Antonino Giambò – Roberto Giambò, *Matematica pre-universitaria: storia e didattica*, Bologna, Pitagora Editrice, 2005.