Misure dell’ellisse

di Antonino Giambò

1. Prima che Apollonio Pergeo (circa 262 – 190 a.C.) trattasse ampiamente dell’ellisse nelle sue *Coniche*, altri studiosi avevano affrontato l’argomento e fra questi Menecmo di Proconneso (IV sec. a.C.), stando almeno a quanto riferiscono Proclo di Licia (V sec. d.C.) ed Eutocio di Ascalona (V-VI sec. d.C.). E forse se ne erano occupati anche Aristeo l’Anziano (IV-III sec.a.C.) ed Euclide (III sec. a.C.).

Ma nessuno di costoro si cimentò nel calcolo dell’area racchiusa da un’ellisse (che da qui in avanti denomineremo per semplicità “area dell’ellisse”) né, tantomeno, in quello della lunghezza del perimetro di un’ellisse.

Chi per primo affrontò questo argomento, ma solo per quanto concerne l’area, fu Archimede di Siracusa (287 circa – 212 a.C.).

In seguito, ma molto tempo dopo, se ne sarebbe occupato anche Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

Sia Archimede sia Cavalieri pervennero ad una formula per l’area dell’ellisse, benché non in forma esplicita, ma mentre Archimede non si occupò di calcolare l’area di un settore di ellisse, Cavalieri ottenne risultati anche per quest’area.

Per un discorso completo ed esauriente, oltre che rigoroso, su quest’ultimo argomento bisogna aspettare però la creazione del Calcolo Integrale.

In questo contributo mi propongo di accennare ai procedimenti di Archimede e Cavalieri e di mostrare anche un procedimento basato sulle affinità per il calcolo dell’area dell’ellisse, e di far vedere inoltre come i problemi delle aree dell’ellisse e di un suo settore si risolvano con il ricorso al Calcolo Integrale.

A differenza del problema dell’area dell’ellisse, che è stato risolto completamente con la dimostrazione di una formula ben definita, non così si può dire del calcolo del perimetro di un’ellisse, per il quale una formula analoga non esiste proprio. E ciò per una ragione che chiariremo più avanti. Vedremo però come i matematici superarono la difficoltà della mancanza di una formula appropriata. Approfitteremo di questa circostanza per trattare di alcune interessanti questioni di Analisi Matematica.

2. Se alla misura del cerchio Archimede ha dedicato un libro (*Misura del cerchio*), a quella dell’ellisse non ne ha riservato uno particolare, ma ha affrontato l’argomento all’interno di un altro libro. Si tratta precisamente dell’opera *Conoidi e Sferoidi*, nella quale ci sono due proposizioni che conducono all’area dell’ellisse, anche se non è esplicitata una formula di tale area. Queste proposizioni sono la 4 e la 5.

La proposizione 4 è dimostrata utilizzando il metodo di esaustione con un procedimento non dissimile da quello seguito da Euclide (*Elementi*, libro XII, prop. 2) per dimostrare che “i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri”.

La proposizione 5 è conseguenza della 4.

Ma vediamo prima di tutto gli enunciati di queste proposizioni e come ciascuna di esse conduca ad una formula dell’area dell’ellisse [1, pagine 254 e seguenti], ovviamente in base al nostro linguaggio simbolico.

PROPOSIZIONE 4.

« Qualunque area compresa da un’ellisse, rispetto al cerchio avente il diametro uguale al maggior diametro dell’ellisse, ha lo stesso rapporto che il minor diametro di questa ha rispetto al maggiore, ossia rispetto al diametro del cerchio. »

Nel nostro linguaggio simbolico, indicati con a, b i semiassi dell’ellisse (a>b) e con A la sua area:

$$\frac{\mathrm{A}}{\pi\mathrm{a}^2}=\frac{2\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} \quad \text{da cui segue la formula dell'area dell'ellisse:} \quad \mathrm{A}=\pi\mathrm{ab}.$$

PROPOSIZIONE 5.

« Qualunque area compresa da un’ellisse, rispetto a qualunque cerchio, ha lo stesso rapporto che il rettangolo compreso dai diametri dell’ellisse ha rispetto al quadrato del diametro del cerchio. »

Nel nostro linguaggio simbolico, indicati con a, b i semiassi dell'ellisse, con r il raggio del cerchio e con A l'area dell'ellisse:

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{2a \cdot 2b}{(2r)^2} \quad \text{da cui segue:} \quad A = \pi ab\,.$$

CENNO SULLA DIMOSTRAZIONE DELLA PROP. 4.

Si tratta di confrontare l'area dell'ellisse ABCD con quella del cerchio AECF (figura 1) e di provare che si ha:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{\text{area (ABCD)}}{\text{area (AECF)}}\,.$$

Si considera per questo il quarto proporzionale X dopo BD, AC e area(ABCD), ossia:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{\text{area (ABCD)}}{X}\,.$$

A questo punto, utilizzando il metodo di esaustione, Archimede dimostra che non può essere X>area(AECF) né X<area(AECF). Deve essere pertanto X=area(AECF). E la dimostrazione è così conclusa.

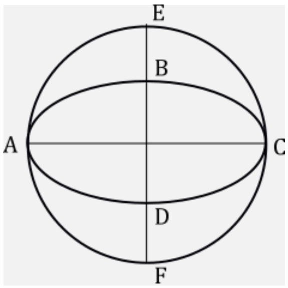

figura 1

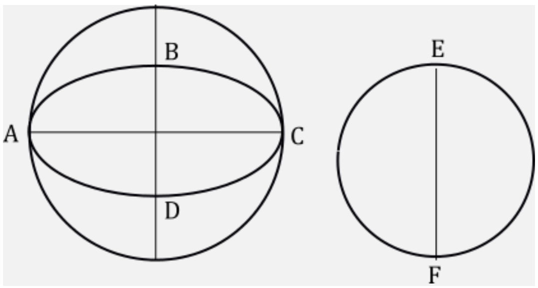

figura 2

DIMOSTRAZIONE DELLA PROP. 5

Si confronta l'area dell'ellisse ABCD con quella di un qualunque cerchio di diametro EF (figura 2) e si prova che si ha:

$$\frac{\text{area ellisse}}{\text{area cerchio}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{EF}^2}\,.$$

Per questo si traccia il cerchio di diametro AC, circoscritto all'ellisse (figura 2).

Per la proposizione 4 risulta:

$$\frac{\text{area (ellisse ABCD)}}{\text{area (cerchio di diametro AC)}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}\,.$$

D'altro canto, in virtù di Euclide (*Elementi*, libro XII, prop. 2), i due cerchi stanno fra loro come i quadrati dei rispettivi diametri, ossia:

$$\frac{\text{area (cerchio di diametro AC)}}{\text{area (cerchio di diametro EF)}} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{EF}^2}\,.$$

Di conseguenza, moltiplicando membro a membro le due uguaglianze, si ha:

$$\frac{\text{area (ellisse ABCD)}}{\text{area (cerchio di diametro AC)}} \cdot \frac{\text{area (cerchio di diametro AC)}}{\text{area (cerchio di diametro EF)}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AC}^2}{\overline{EF}^2}\,,$$

da cui, dopo aver semplificato, segue la relazione che si vuole dimostrare.

3. . Quando si parla del principio di Cavalieri ci si riferisce sempre, o quasi sempre, alle figure dello spazio tridimensionale. In realtà, esso riguarda anche le figure piane. Ce ne convinciamo leggendo la proposizione I del libro VII della *Geometria degli indivisibili*, che enuncia il "principio di Cavalieri" nella forma nella quale è solitamente conosciuto. Riportiamo questa proposizione solamente nella parte che si riferisce alle figure piane [3, pag. 654]:

« Figure piane quali si vogliano, collocate fra le medesime parallele, nelle quali – condotte linee rette qualunque equidistanti alle parallele in questione – le porzioni intercettate di una qualsivoglia di dette rette sono uguali, sono del pari uguali fra loro. »

Ma quello che a noi interessa in questa circostanza è la proposizione II dello stesso libro VII, che questa volta si riferisce solamente alle figure piane [3, pag. 670]:

« Figure piane quali si vogliano, poste fra le medesime parallele, nelle quali, condotte quali si vogliano linee rette parallele alle parallele stesse, le porzioni racchiuse di una quale si voglia linea retta stanno tra di loro, come le porzioni di una altra qual si voglia retta racchiuse nelle medesime figure (esistendo tuttavia sempre nella figura [linee] analoghe), avranno tra di loro lo stesso rapporto, che [hanno tra di loro] le dette porzioni. »

Sulla base di quest'ultima proposizione, Cavalieri perviene ad una proposizione che ricorda la proposizione 4 di Archimede. Si tratta della proposizione X del libro III (1) [3, pag. 331]:

« Se un circolo e una ellisse [...] sono collocati attorno ad un medesimo asse, o diametro, stanno tra di loro come i secondi assi, o diametri. »

Con rifermento alla stessa figura 1 di Archimede, l'asse o diametro rispetto al quale sono collocati l'ellisse e il cerchio è il segmento AC, mentre i secondi assi o diametri sono BD per l'ellisse ed EF per il cerchio. Cosicché risulta:

$$\frac{\text{area (cerchio AECF)}}{\text{area (ellisse ABCD)}} = \frac{BD}{EF}.$$

Nel nostro linguaggio simbolico, indicata con A l'area dell'ellisse e ponendo BD=2a e EF=2b:

$$\frac{\pi a^2}{A} = \frac{2a}{2b} \quad \text{da cui segue:} \quad A = \pi a b\,.$$

4. Anche il matematico e astronomo tedesco Giovanni Keplero (Johann Kepler, 1571-1630) si cimentò, peraltro con esito positivo, nella dimostrazione della formula dell'area di un'ellisse. Siccome il suo ragionamento, condotto a livello intuitivo, trova una razionalizzazione in un procedimento basato sulle trasformazioni geometriche, è su questo ragionamento che preferisco soffermarmi.

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia assegnata la circonferenza di raggio r e centro O, la cui equazione è:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Considerata l'affinità di equazioni:

$$X = h\,x,\ \ Y = k\,y,$$

dove h, k sono numeri reali che per comodità supponiamo positivi, il suo modulo è m=h k.

Poiché da quelle equazioni si ricava:

$$x = \frac{X}{h}\,,\quad y = \frac{Y}{k}\,,$$

la circonferenza viene trasformata dall'affinità nell'ellisse:

$$\frac{X^2}{h^2} + \frac{Y^2}{k^2} = r^2, \quad \text{ossia:} \quad \frac{X^2}{(hr)^2} + \frac{Y^2}{(kr)^2} = 1.$$

I suoi semiassi sono i valori a, b tali che: a=h r, b=k r.

Chiamata A l'area dell'ellisse ed S l'area del cerchio, si ha, per una proprietà delle affinità:

$$\frac{A}{S} = m = h\,k\,.\ \text{Pertanto:}\ \frac{A}{S} = \frac{a}{r}\cdot\frac{b}{r} = \frac{ab}{r^2}\,.\ \text{Siccome}\ S = \pi r^2,\ \text{allora}\ A = \pi r^2 \cdot \frac{ab}{r^2}\,,\ \text{ossia:}\ A = \pi ab\,.$$

5. La creazione del Calcolo Integrale fornì la possibilità di giungere alla formula dell'area dell'ellisse come sua semplice (si fa per dire) applicazione. Non solo. Permise anche di calcolare l'area di un settore dell'ellisse. Vediamo come.

- Area dell'ellisse. Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), consideriamo l'ellisse di equazione:

---

1 Può sembrare una illogicità il fatto che si utilizzi una proposizione del libro VII per dimostrarne una del libro III. In realtà, le proposizioni del libro VII sono già presenti nei libri precedenti, dove sono state dimostrate con argomentazioni diverse, sulla base comunque di una formulazione altra del "principio di Cavalieri", presente già nel libro II (proposizioni II e III).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

essendo a, b (a>b>0) i suoi semiassi.

Ci proponiamo di calcolare l'area A_1 del triangolo mistilineo OAB situato nel 1° quadrante. Area che è uguale, per evidenti ragioni di simmetria, alla quarta parte dell'area A dell'ellisse (figura 3).

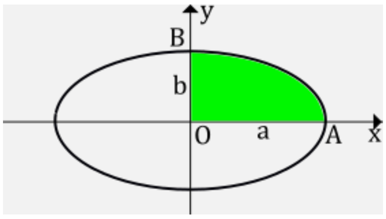

figura 3

Una volta esplicata la variabile y in funzione di x, quella cercata è l'area sotto il grafico della funzione:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

relativa all'intervallo $[0, a]$. Si ha perciò:

$$A_1=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\ dx\,.$$

Dopo aver trovato una primitiva della funzione $\sqrt{a^2-x^2}$, che è la funzione:

$$\frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\mathrm{asin}\left(\frac{x}{a}\right),$$

si ha:

$$A_1=\frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}\,x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\mathrm{asin}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\mathrm{asin}(1)=\frac{a\,b}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\,a\,b}{4}\,.$$

Di conseguenza:

$$A=4\,A_1=\pi\,a\,b\,.$$

- Area di un settore dell'ellisse. Ci riferiamo ad un particolare settore di una particolare ellisse. Precisamente al settore OPQ delimitato dall'ellisse di equazione:

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1$$

e dalle semirette r, s uscenti dall'origine O del sistema di riferimento e sviluppatesi nel primo quadrante, di equazioni rispettivamente y=x e y=2x (figura 4).

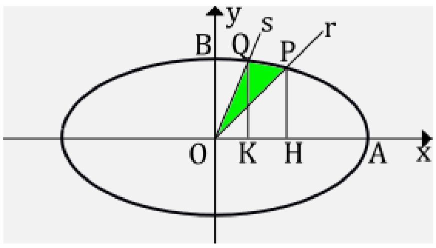

figura 4

Si ha:

area(settore OPQ) = area(settore OAQ) – area(settore OAP) =

= {area(triangolo OKQ) + area(triangolo mistilineo KAQ)} –

– {area(triangolo OHP) + area(triangolo mistilineo HAP)}.

D'altro canto:

– area(triangolo OKQ) $=\frac{1}{2}\,\mathrm{OK}\cdot\mathrm{KQ}=\frac{1}{2}\,x_Q y_Q$, area(triangolo mistilineo KAQ) $=\frac{1}{2}\int_{x_Q}^{x_A}\sqrt{4-x^2}\ dx$,

– area(triangolo OHP) $= \frac{1}{2}\,\mathrm{OH}\cdot\mathrm{HP} = \frac{1}{2}\,x_P y_P$, area(triangolo mistilineo HAP) $= \frac{1}{2}\int_{x_P}^{x_A}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Fatti i debiti conti, con un po' di pazienza si perviene all'area richiesta.

6. Il problema riguardante l'area dell'ellisse o di qualche suo settore è dunque completamente risolto con il ricorso al Calcolo Integrale.

Ma neppure il Calcolo Integrale è sufficiente per ottenere una formula chiusa del perimetro di un'ellisse. Andiamo a comprenderne il motivo.

Considerata la stessa ellisse di semiassi a, b, riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), avente l'origine O nel centro dell'ellisse e assi coincidenti con gli assi dell'ellisse, già presa in esame, ci proponiamo di calcolare la lunghezza L dell'arco $\widehat{AB}$ contenuto nel primo quadrante (figura 5).

Ovviamente, per evidenti ragioni di simmetria, la lunghezza del perimetro P dell'ellisse è P=4L.

Rappresentiamo l'ellisse mediante le sue equazioni parametriche:

$$x = a\sin t\,,\quad y = b\cos t\,,\quad \text{con}\quad 0 \le t < 2\pi.$$

Naturalmente, riguardo all'arco $\widehat{AB}$ si ha:

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

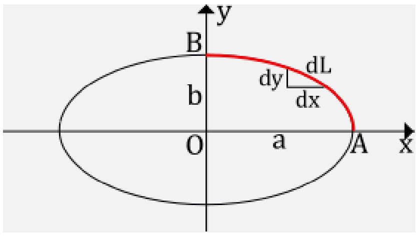

figura 5

Consideriamo la lunghezza dL di un elemento infinitesimale dell'arco. Si ha: $dL^2=dx^2+dy^2$.

Siccome:

$$dx = a\cos t\ dt\,,\quad dy = -b\sin t\ dt\,,$$

si ha:

$$dL^2 = (a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)\,dt^2,$$

o anche:

$$dL^2 = [(a^2(1-\sin^2 t) + b^2\sin^2 t)]\,dt^2 = a^2\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t\right)dt^2.$$

Infine, tenendo presente che l'espressione $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ è il quadrato dell'eccentricità e dell'ellisse:

$$dL^2 = a^2(1 - e^2\sin^2 t)\,dt^2.$$

La lunghezza L dell'arco $\widehat{AB}$ è allora la seguente:

(1) $$L = \int_0^{\pi/2} dL = a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt\,.$$

Il fatto increscioso è che di questo integrale normalmente non si riesce a calcolare un valore esatto, ma solo delle approssimazioni.

Per la cronaca. Posto:

$$E(e) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt\,,$$

seguendo una classificazione ideata dal matematico francese Adrien Marie Legendre (1752-1833), questo integrale, di cui non si riesce a calcolare il valore se non per approssimazione, è stato denominato *integrale ellittico di seconda specie*.

La classificazione di cui parliamo figura nella sua opera maggiore: *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, *avec des tables pour en faciliter le calcul numerique,* pubblicata in tre volumi fra il 1825 e il 1828, alla quale Legendre lavorò per circa 40 anni.

Prima dell'avvento dell'Informatica, anche la determinazione delle suddette approssimazioni comportava calcoli impegnativi. Oggigiorno, però, esistono potenti software matematici che permettono di trovare rapidamente tali approssimazioni, implementando opportune formule di integrazione numerica, ovviamente una volta che siano stati esplicitati i valori di a e b e quindi il valore di e.

A titolo di esempio, con riferimento all'ellisse di semiassi a=4 e b=2, utilizzando appunto un idoneo software, e tenendo presente che $e^2=3/4$, si calcola che la lunghezza L, approssimata con tre cifre decimali esatte, è la seguente:

$$\mathrm{L} = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 t} \, dt \approx 4{,}844 \, .$$

Di conseguenza, la lunghezza del perimetro dell'ellisse è la seguente:

$$\mathrm{P} = 4\,\mathrm{L} \approx 4 \times 4{,}844 \approx 19{,}376 \, .$$

7. Bisogna aggiungere che ancor prima della creazione del Calcolo Integrale e anche dopo, a dire il vero, i matematici tentarono in diversi modi di pervenire a qualche approssimazione del perimetro dell'ellisse.

Per la cronaca:

- Keplero suggerì come approssimazione la seguente espressione:

(2) $$\mathrm{P} \approx 2\pi \cdot \frac{a+b}{2} \, ,$$

vale a dire P uguale al prodotto di 2π per la media aritmetica dei semiassi dell'ellisse.

Con questa formula, per l'ellisse considerata sopra (a=4, b=2), si ottiene la seguente approssimazione del perimetro: $\mathrm{P} \approx 18{,}849$. Approssimazione per difetto con errore relativo del 2,7%.

- Altri hanno proposto di sostituire la media aritmetica con la media quadratica dei semiassi, per cui una nuova formula di approssimazione sarebbe la seguente:

(3) $$\mathrm{P} \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \, .$$

Con questa formula si ottiene, per la solita ellisse, la seguente approssimazione del perimetro: $\mathrm{P} \approx 19{,}869$. Approssimazione per eccesso con errore relativo del 2,5%.

- In tempi più recenti, il geniale matematico indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920) ha proposto due formule di approssimazione del perimetro di un'ellisse di semiassi a, b. Sono riportate nel paragrafo 16 di *Modular Equations and Approximations to* π, presente in [4]. Una delle due formule è la seguente:

(4) $$\mathrm{P} \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right] .$$

Con questa formula, sempre con riferimento all'ellisse di cui sopra, si ottiene la seguente eccellente approssimazione: $\mathrm{P} \approx 19{,}376$.

L'approssimazione, rispetto ai valori della formula (1), migliora con la formula (3), mentre peggiora con la formula (2), quando l'eccentricità dell'ellisse diminuisce. Con la formula (4) si hanno sempre valori eccellenti.

Un esempio, per un'ellisse di assi a=5, b=4, e quindi di eccentricità $e=3/5$:

- Con la formula (1):

$$\mathrm{P} = 4\,\mathrm{L} = 4 \cdot 5 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{9}{25} \sin^2 t} \, dt \approx 28{,}361 \, .$$

Approssimazione con tre cifre decimali esatte.

- Con la formula (2) si ottiene l'approssimazione $P \approx 13{,}328$. Valutazione per difetto con un errore relativo del $53{,}0\%$.
- Con la formula (3) si ottiene l'approssimazione $P \approx 28{,}448$. Valutazione per eccesso con un errore relativo dello 0,3%.
- Con la formula (4) si ottiene l'approssimazione eccellente $P \approx 28{,}361$.

La formula (2) fornisce di norma un'approssimazione del perimetro dell'ellisse veramente grossolana. Ne è anche riprova il fatto che, quando $a=b$, per cui l'ellisse degenera in una circonferenza di raggio a, invece di dare il valore $2\pi a$, dà il valore $2\pi\sqrt{a}$. Valori che coincidono solo quando $a=1$.

Diverso il comportamento delle formule (3) e (4) che, quando $a=b$, forniscono entrambe proprio il valore atteso $P=2\pi a$.

Valore che è ottenuto anche utilizzando la formula (1), ove si tenga presente che in tal caso è $e=0$. Di fatto:

$$P = 4\,L = 4\,a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\,dt \;= 4\,a\int_0^{\pi/2}dt = 4a\cdot[t]_0^{\pi/2} = 4\,a\cdot\frac{\pi}{2} = 2\,\pi\,a.$$

8. COMPLEMENTI 1.

A beneficio di quei pochi studenti che intendono intraprendere studi in ambito matematico, vado a descrivere come i matematici – prima dell'avvento dell'Informatica e mettendo da parte sia formule di approssimazione più o meno accurate sia formule di integrazione numerica – hanno risolto la questione relativa al calcolo di $E(e)$.

Riprendiamo allora questa funzione:

$$E(e) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 t}\;dt\,.$$

Posto $x=e^2\sin^2 t$, si ha:

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 t} = \sqrt{1-x}\,.$$

Si sviluppa in serie la funzione $\sqrt{1-x}$ e si ottiene:

$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots\;.$$

Conviene adesso introdurre per comodità il simbolo k!!, denominato *semifattoriale* di k, tale che:

$$k!! = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad k=0 \\ 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot k, \;\; \text{cioè il prodotto dei naturali dispari da 1 a k, se k è un naturale dispari} \\ 2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot k, \;\; \text{cioè il prodotto dei naturali pari da 2 a k, se k è un naturale pari} \end{cases}$$

Utilizzando questa scrittura simbolica e qualche semplice artificio, lo sviluppo precedente assume la forma seguente:

$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{1}{1}x-\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{1}{3}x^2-\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{1}{5}x^3-\frac{7!!}{8!!}\cdot\frac{1}{7}x^4-\cdots = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n-1}x^n\right].$$

Di conseguenza, rimettendo $e^2\sin^2 t$ al posto di x, si ha:

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 t} = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n-1}(e^2\sin^2 t)^n\right] = 1-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{e^{2n}}{2n-1}\sin^{2n} t\right].$$

A questo punto basta integrare termine a termine la precedente espressione e, a conti fatti, tenendo presente che:

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} t\;dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

si trova il seguente sviluppo in serie di $E(e)$:

$$E(e) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{e^{2n}}{2n-1}\right\},$$

ovvero, mettendo $\pi/2$ in evidenza e scrivendo per esteso:

$$E(e) = \frac{\pi}{2}\left\{1-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{e^2}{1}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\frac{e^4}{3}+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\frac{e^6}{5}+\cdots+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^2\cdot\frac{e^{2n}}{2n-1}+\cdots\right]\right\}.$$

Cosicché la lunghezza del perimetro P dell'ellisse, ricordando che P = 4 a E(e), è la seguente:

$$P = 2\,\pi\,a\left\{1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{e^2}{1} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{e^4}{3} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{e^6}{5} + \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^2 \cdot \frac{e^{2n}}{2n-1} + \cdots\right]\right\}.$$

Con questa formula, arrestando al 3° termine la serie dentro la parentesi quadra, con riferimento all'ellisse in cui $a=4$ ed $e^2=3/4$, si ha:

$$P \approx 2\,\pi \cdot 4 \cdot \left\{1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{5}\right]\right\} \approx$$

$$\approx 8\,\pi\,[1 - (0{,}1875 + 0{,}02636 + 0{,}00823)] \approx 19{,}550\,,$$

che chiaramente è una valutazione per eccesso di P, il cui valore esatto fino al 3° decimale è 19,376.

Analogamente, per l'altra ellisse, in cui $a=5$ ed $e^2=9/25$, sempre arrestando lo sviluppo al 3° termine, si ha:

$$P \approx 2\,\pi \cdot 5 \cdot \left\{1 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{9}{25} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^3 \cdot \frac{1}{5}\right]\right\} \approx$$

$$\approx 8\,\pi\,[1 - (0{,}09 + 0{,}006075 + 0{,}000004)] \approx 28{,}396,$$

che ovviamente è una valutazione per eccesso di P, il cui valore esatto fino al 3° decimale è 28,361.

9. COMPLEMENTI 2.

Per dare compiutezza alla dimostrazione illustrata nel paragrafo precedente mancano due tasselli:

1) dimostrare che quello su rappresentato è lo sviluppo in serie della funzione $\sqrt{1-x}$, ma questo è lasciato a chi ha la ventura di leggere queste note;

2) dimostrare che

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \; dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,,$$

e questo lo facciamo adesso.

Poniamo allora:

$$J_m = \int \sin^m t \; dt\,.$$

Possiamo scrivere:

$$J_m = \int \sin^{m-1} t \sin t \; dt\,.$$

Integriamo per parti, assumendo $\sin^{m-1} t$ come fattore finito e $\sin t\; dt$ come fattore differenziale.

Dopo aver calcolato che:

$$d \sin^{m-1} t = (m-1) \sin^{m-2} t \cos t \, dt \quad \text{e, a meno di una costante,} \quad \int \sin t \, dt = -\cos t\,,$$

otteniamo:

$$J_m = \sin^{m-1} t \; (-\cos t) - \int (-\cos t)\,(m-1) \sin^{m-2} t \cos t \; dt =$$

$$= -\sin^{m-1} t \cos t + (m-1) \int \sin^{m-2} t \cos^2 t \; dt =$$

$$= -\sin^{m-1} t \cos t + (m-1) \int \sin^{m-2} t\,(1 - \sin^2 t)\, dt =$$

$$= -\sin^{m-1} t \cos t + (m-1) \int \sin^{m-2} t \; dt - (m-1) \int \sin^m t \; dt\,.$$

Dunque, dopo aver costatato che:

$$\int \sin^{m-2} t \; dt = J_{m-2} \quad \text{e} \quad \int \sin^m t \; dt = J_m\,,$$

si ha:

$$J_m = -\sin^{m-1} t \cos t + (m-1)\, J_{m-2} - (m-1)\, J_m.$$

Da qui, risolvendo rispetto a J_m , si trova:

$$J_m = -\frac{1}{m}\sin^{m-1} t \cos t + (m-1) + \frac{m-1}{m} J_{m-2} .$$

Posto allora:

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m t \ dt ,$$

si ha:

$$I_m = \left[-\frac{1}{m}\sin^{m-1} t \cos t + \frac{m-1}{m} J_{m-2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{m-1}{m} I_{m-2} .$$

In base a questo risultato, supponendo che sia m=2n, si ottengono le seguenti relazioni:

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} ,$$
$$I_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} ,$$
$$I_{2n-4} = \frac{2n-5}{2n-4} I_{2n-6} ,$$
$$\dots \dots \dots \dots ,$$
$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 ,$$
$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 .$$

Moltiplicando membro a membro queste n uguaglianze e semplificando, si ottiene:

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot \dots \cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot I_0 .$$

D’altro canto, si ha:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} .$$

In definitiva, resta provato quello che si doveva provare, cioè:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \ dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} .$$

OSSERVAZIONE.

Nella precedente dimostrazione abbiamo supposto che m fosse un numero pari, precisamente abbiamo supposto m=2n, poiché era quello che ci serviva.

Se però m fosse un numero dispari, il risultato sarebbe diverso. In particolare, se m=2n+1 si ha:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t \ dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} .$$

Ma la dimostrazione di ciò è lasciata a chi legge, se ne ha voglia.

BIBLIOGRAFIA

[1] Archimede, *Opere* (di) a cura di Attilio Frajese, Torino, UTET, 1974.
[2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980.
[3] Bonaventura Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, Torino, UTET, 1966.
[4] G.H. Hardy e altri, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Providence, Rhod Island, 2000.
[5] G. E. Šilov, *Analisi Matematica*, 1, Mosca, Edizioni MIR, 1978.
[6] Wikipedia, libera enciclopedia online.