PROBLEMA 1

1. Siano dati nello spazio tre punti A, B, C non allineati; dimostrare che, se un segmento MN è visto sotto angolo retto da ciascuno dei tre punti A, B, C, è visto sotto angolo retto anche da ogni altro punto della circonferenza Γ circoscritta al triangolo ABC.
   Dopo aver mostrato che A, B, C appartengono alla stessa superficie sferica S di diametro $MN = 2R$,si dia l'equazione di S in un riferimento cartesiano Oxyz in cui il suo centro coincida con l'origine e il raggio R abbia lunghezza uguale a 4.
2. Nel riferimento cartesiano Oxyz si consideri la circonferenza Γ di raggio r , intersezione di S col piano $z = -2$ e si inscriva in essa un triangolo equilatero ABC , avente il vertice A nel punto di coordinate $A(0, r, -2)$. Si determinino le coordinate dei punti $A, B. C$.
   Esiste, internamente a S, un quarto punto D tale che i quattro punti A, B, C, D siano a due a due equidistanti?
3. Sia M il punto di coordinate $(0, 2\sqrt{3}, 2)$ ed N il suo simmetrico rispetto all'origine O.
   Indicato con P un punto generico sulla circonferenza Γ', intersezione di S col piano xy, si determini il valore massimo e il valore minimo dell'area del triangolo PMN.
4. Un segmento MN, diametro della sfera S, genera , in una rotazione completa intorno all'asse z, due superfici coniche .
   Si determini il valore massimo che può assumere il volume dei coni corrispondenti.

Qual è il rapporto tra il volume complessivo dei due coni di volume massimo e il volume della sfera S?

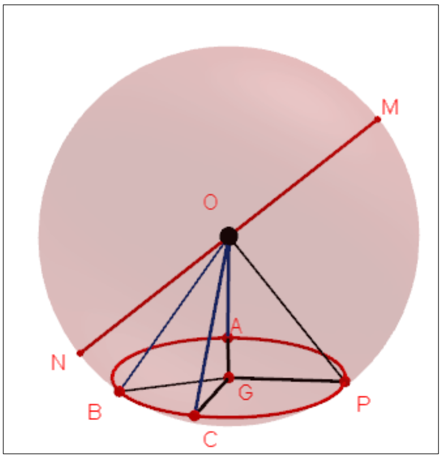
Soluzione

Punto 1 I tre punti (non allineati) individuano un piano α e, su di esso, un triangolo ABC e la circonferenza Γ ad esso circoscritta, il cui centro G è equidistante dai tre vertici : $\overline{AG} = \overline{BG} = \overline{CG} = r$. **(Fig,1)**

Un segmento MN , che sia visto sotto un angolo retto da ciascuno dei tre punti A, B, C, deve essere diametro di ciascuna delle circonferenze individuate dalle terne di punti MNA, MNB, MNC.

Pertanto, indicato O il punto medio di MN, deve risultare

$$\frac{\overline{MN}}{2} = \overline{MO} = \overline{NO} = \overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$$



Fig,1

Poiché il luogo dei punti dello spazio equidistanti dai tre vertici del triangolo è la retta h perpendicolare in G al piano α, si deduce che il punto O deve appartenere alla retta h. Poichè $\forall P \in \Gamma$ il triangolo rettangolo OGP è congruente ai tre triangoli OGA, OGB, OGC, si può concludere che $\forall \boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\Gamma}$ **risulta**

$$\frac{\overline{\boldsymbol{MN}}}{\mathbf{2}}=\overline{\boldsymbol{MO}}=\overline{\boldsymbol{NO}}=\overline{\boldsymbol{PO}}$$

Se il segmento $\boldsymbol{MN}$ è visto sotto angolo retto da ciascuno dei tre punti $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$, è visto sotto angolo retto anche da ogni altro punto della circonferenza $\boldsymbol{\Gamma}$ circoscritta al triangolo $\boldsymbol{ABC}$.

Dalle uguaglianze

$$\frac{\overline{\boldsymbol{MN}}}{\mathbf{2}}=\overline{\boldsymbol{MO}}=\overline{\boldsymbol{NO}}=\overline{\boldsymbol{AO}}=\overline{\boldsymbol{BO}}=\overline{\boldsymbol{CO}}=\overline{\boldsymbol{PO}}$$

si deduce che i punti M, N, A, B, C, P appartengono alla stessa superficie sferica S di diametro MN .

Il piano ABC taglia la superficie S lungo una circonferenza alla quale appartiene il generico punto di Γ e , pertanto, coincide con Γ.

Se $\overline{MN}=2R=8$, l'equazione della superficie sferica S , in un riferimento cartesiano Oxyz in cui il suo centro coincida con l'origine, è $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=16}$

Punto 2.

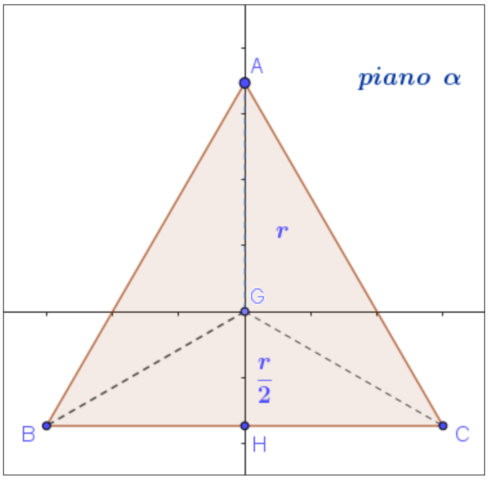
In un generico piano di equazione $z=d$

- il raggio della circonferenza, intersezione con la superficie sferica S, è
  $\boldsymbol{r}=\sqrt{(\mathbf{R^2-d^2})}$
- il lato del triangolo equilatero inscritto è
  $\mathbf{l}=\mathbf{r}\sqrt{\mathbf{3}}$
- il circocentro è il punto $\boldsymbol{G}(\mathbf{0},\mathbf{0},\boldsymbol{d})$.

Se $d=-2$

$\boldsymbol{r}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}$ $\quad\quad$ $\mathbf{l}=\mathbf{6}$

$\boldsymbol{A}(\mathbf{0},\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}},-\mathbf{2})$ $\quad$ $\mathbf{B}(\mp\mathbf{3},-\sqrt{\mathbf{3}},-\mathbf{2})$
$\mathbf{C}(\pm\mathbf{3},-\sqrt{\mathbf{3}},-\mathbf{2})$



Fig,2

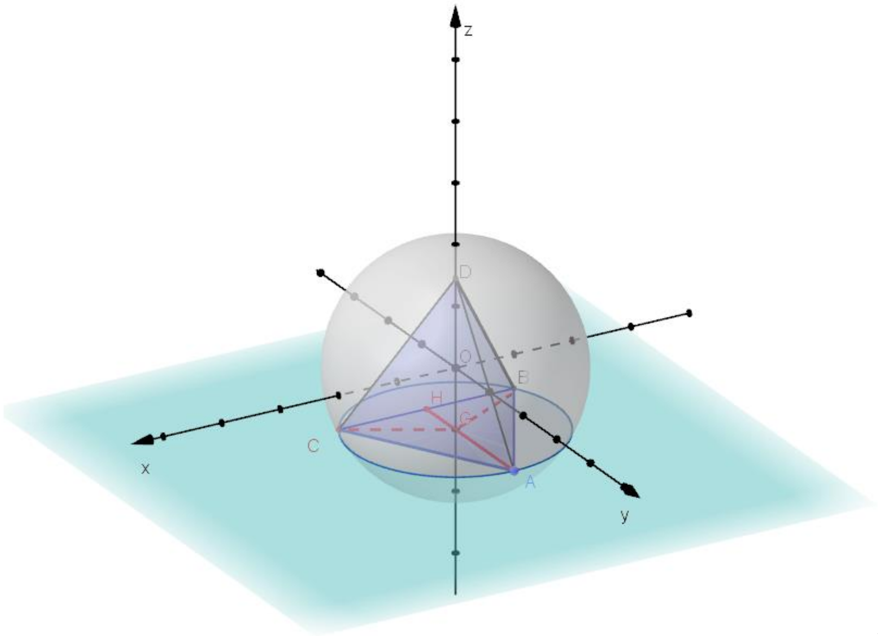
*In **figura 2** B ha ascissa negativa e C ascissa positiva*

Nello spazio esiste un punto D tale che i quattro punti A, B, C, D siano a due a due equidistanti ed è il quarto vertice di un tetraedro regolare di base ABC, avente, cioè, tutti gli spigoli di lunghezza $r\sqrt{3}$.

La misura dell'altezza del tetraedro è $\overline{GD} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$

Se $d = -2$ $\quad \overline{GD} = 2\sqrt{6} \rightarrow D(0,0,\ 2\sqrt{6} - 2)$

Poiché $2\sqrt{6} - 2 < 4$, il punto D è interno alla superficie sferica S (figura3)



Fig,3

In generale , se la base giace su un generico piano di equazione $z = d$ e indichiamo con $D(0,0,z)$ e $D'(0,0,z')$ i vertici dei due tetraedri regolari di base ABC , con $z' = 2d - z$, essendo i due punti simmetrici rispetto a G, si dimostra che

uno dei due vertici è interno alla sfera se è verificata la condizione $|d| \geq \frac{R}{3}$.

E' interessante osservare, in proposito, che il centro della sfera circoscritta a un tetraedro regolare è il punto di incontro delle tre altezze del tetraedro e divide ciascuna altezza (o mediana) in due parti, una tripla dell'altra; la sua distanza da ciascuna base è, pertanto, $\frac{R}{3}$.

Pertanto, il vertice del tetraedro regolare appartiene alla superficie sferica circoscritta, se la sua base giace su un piano distante $\frac{R}{3}$ dal centro.

Punto 3.

Se $M(0, 2\sqrt{3}, 2)$ è il primo estremo, il secondo estremo del diametro MN è $N(0, -2\sqrt{3}, -2)$.

La retta NM giace nel primo e terzo quadrante del piano yz e forma con la direzione positiva dell'asse y un angolo β tale che

$\sin\beta = \frac{2}{R} = \frac{1}{2}$ e $\cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \beta = \frac{\pi}{6}$

Nella **figura 4** sono inoltre evidenziati

- La circonferenza Γ' e le coppie di punti $C, D \ - \ E, F$ in cui incontra l'asse y e l'asse x rispettivamente
- Il punto $P\ (R\cos\delta, R\sin\delta, 0)$ dove $\delta = \ E\hat{O}P \to 0 \leq \delta \leq 2\pi$
- Il punto H e il punto K in cui il piano piano perpendicolare alla retta MN e passate per P, incontra MN e l'asse y rispettivamente
- L'angolo $\gamma = P\hat{H}O = \frac{\pi}{2}$ e l'angolo $\alpha = P\hat{O}H < \frac{\pi}{2}$
- Il segmento $\overline{\boldsymbol{PH}} = \boldsymbol{R}\ \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$ altezza relativa all'ipotenusa del triangolo PMN
- Il segmento $\overline{\boldsymbol{OH}} = \overline{OK}\ \cos\beta = \overline{OP}\, cos\,\alpha$

$$\boldsymbol{Area\ \ PMN} = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{MN}} \cdot \overline{\boldsymbol{PH}} = \boldsymbol{R}^2 \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$$

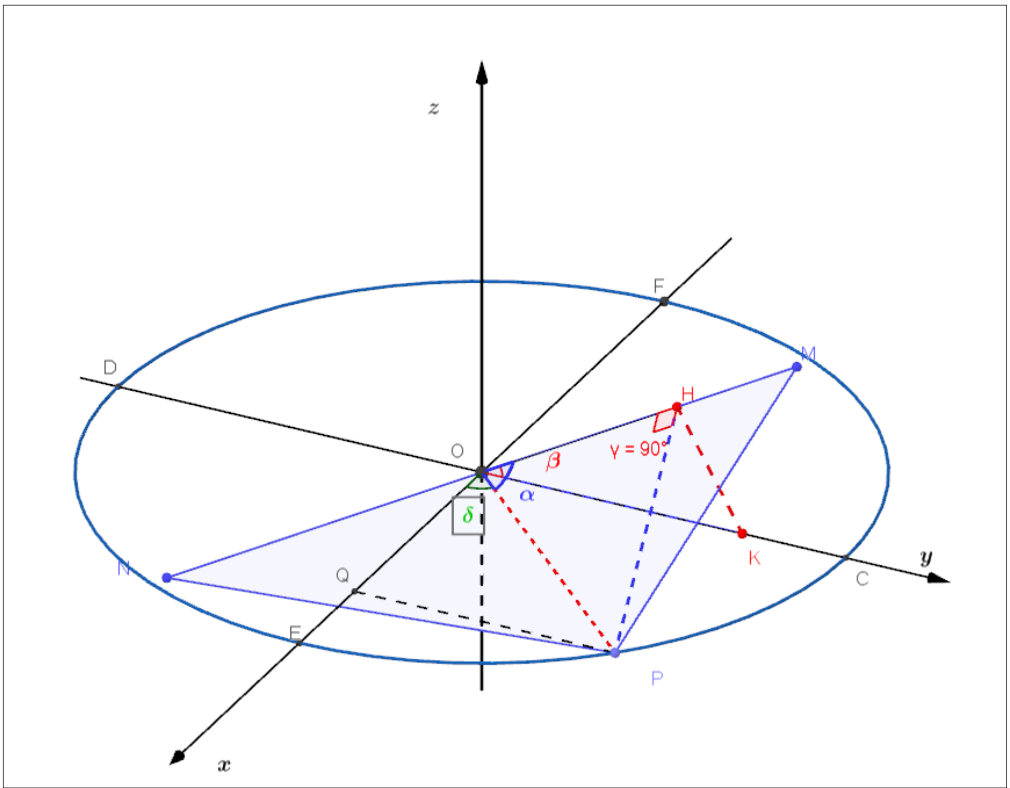
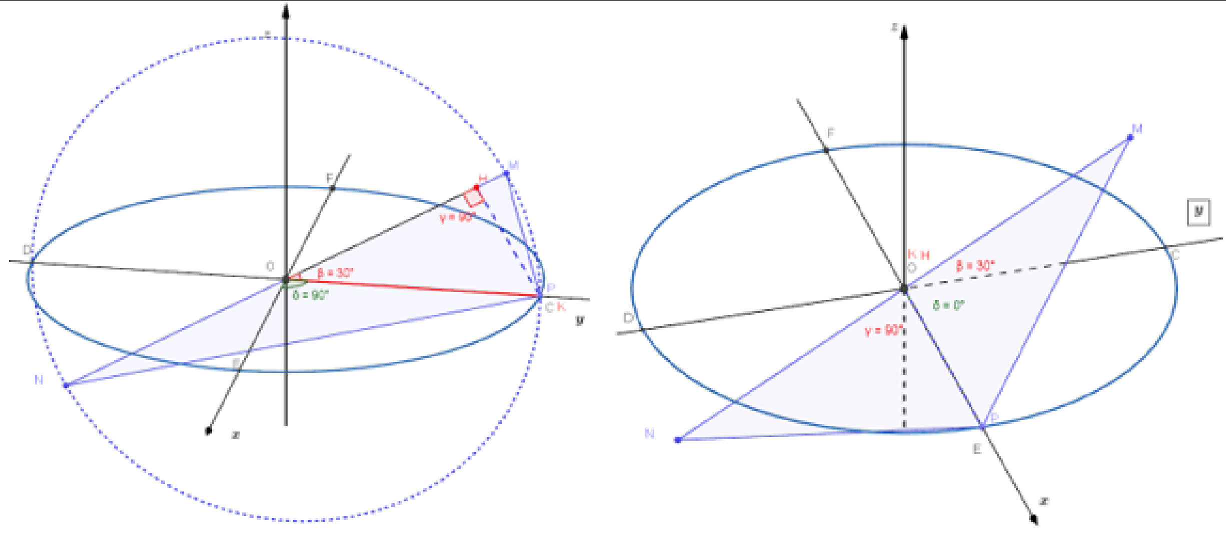


Fig.4

Il **valore minimo** dell'area corrisponde alle posizioni di P per cui l'altezza $\overline{PH}$ assume valore minimo e il segmento $\overline{OH} = \overline{OK}\ \cos\beta$ assume valore massimo .
Questo accade se $K \equiv P \equiv C \to \mathrm{P} \in$ asse y $\to \overline{\mathrm{PH}} = \mathrm{R}\sin\beta$
Pertanto, **il minimo valore dell'area è uguale a $\mathbf{R^2 \sin\beta}$.** ***(Figura 5-a)***

Il **valore massimo** dell'area corrisponde alle posizioni di P per cui l'altezza $\overline{PH}$ assume valore massimo e il segmento $\overline{OH}$ assume valore minimo .Questo accade se $K \equiv H \equiv O \rightarrow \mathrm{P} \in$ asse x $ovvero$ $\mathbf{OP \perp MN} \rightarrow \boldsymbol{\overline{PH} = \overline{OP} = R}$
Pertanto, il massimo valore dell'area è uguale a $\mathbf{R^2}$ *(Figura 5-b)*



Area minima **Area massima**

Fig,5

Approfondimento

Dalla relazione $\overline{OH} = \overline{OK}\ \cos\beta = \overline{OP}\, cos\, \alpha$ si deduce $R sin\, \delta\, cos\, \beta = R\ \cos\alpha \rightarrow cos\, \alpha = sin\, \delta\, cos\, \beta,$

Alla stessa relazione si arriva mediante il calcolo vettoriale:

Se $\vec{u}$ *è il vettore* $\overrightarrow{OM}$*, di componenti* $(0, R\, cos\, \beta, R\, sin\, \beta)$ *e* $\vec{v}$ *il vettore* $\overrightarrow{OP}$*, di componenti* $(R\, cos\, \delta, Rsin\, \delta\, , 0)$*, l'angolo tra i due vettori si può determinare dalla relazione*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |u||v| \cos\alpha \rightarrow (0 + R^2 \cos\beta \sin\delta + 0) = R^2 \cos\alpha \rightarrow \mathbf{\cos\alpha = \sin\delta \cos\beta}.$$

Osserviamo, inoltre che se $\cos\beta = 0$*, il prodotto scalare* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \forall\delta$*, pertanto*

i due vettori $\overline{OM}$ *e* $\overline{OP}$ *sono tra loro perpendicolari per ogni posizione di P sulla circonferenza Γ': se* MN *è perpendicolare al piano di Γ' (in questo caso* $\in$ *asse* z*) l'area del triangolo* PMN *non varia ed è sempre uguale al valore massimo*

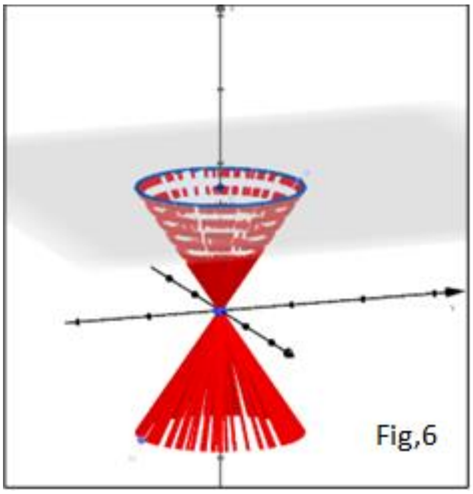
Se, invece, MN *giace sul piano di Γ'(in questo caso sull'asse* y*), essendo*

$\sin\beta = 0$*, il valore minimo dell'area è uguale a 0.*

Punto 4.Le due superfici coniche descritte dai due segmenti OM e ON sono tra loro simmetriche rispetto all'origine del riferimento cartesiano. Pertanto, è sufficiente considerare solo , ad esempio, quella che giace nel semispazio $z \geq 0$**(figura 6)**

Sia M il punto di coordinate (x, y, z) della semisfera $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z \geq 0 \end{cases}$

La superficie conica generata dalla rotazione del raggio $\overline{OM}$ intorno all'asse z, ha apotema $\overline{OM} = 4$, altezza uguale a $|z| = z$, raggio di base uguale a $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 - z^2}$



Fig,6

Il volume del cono è

$$V(z) = \frac{1}{3}\pi(16 - z^2) \cdot z = \frac{1}{3}\pi(16z - z^3)$$

$con\ \ 0 \leq z \leq 4$

Il valore di z per cui la funzione $f(z) = 16z - z^3$, derivabile nell'intervallo di definizione, assume valore massimo si calcola facilmente col metodo delle derivate.

La derivata $f'(z) = 16 - 3z^2$ si annulla in un sol punto dell'intervallo $0 \leq z \leq 4$, precisamente per $z = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Si ha inoltre $\quad f'(z) > 0 \quad se\ \ 0 \leq z < \frac{4}{\sqrt{3}} \rightarrow f(z)\ \ crescente$

$$f'(z) < 0 \quad se\ \ \frac{4}{\sqrt{3}} < z \leq 4 \rightarrow f(z)\ \ decrescente$$

$f\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{128\sqrt{3}}{9}$ è il valore massimo assunto dalla funzione nell'intervallo considerato

Pertanto, il valore massimo $V(z) = \frac{1}{3}\pi \cdot f(z)$ è $V\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{128\sqrt{3}}{9} = \pi \cdot \frac{128\sqrt{3}}{27}$

Il volume complessivo dei due coni è $\pi \cdot \frac{256\sqrt{3}}{27} = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi R^3$ dove $R = 4$ è il raggio della sfera S. **Il rapporto col volume della sfera è $\frac{\sqrt{3}}{9}$.**