Problema 2 In un riferimento cartesiano Oxyz è data la superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

1. Un piano α , parallelo al piano xy, intercetta sulla sfera una sezione la cui area è uguale ai $\frac{3}{4}$ di un suo cerchio massimo .
   Si dia una rappresentazione cartesiana o parametrica della circonferenza Γ intercettata su S dal piano α, nel caso in cui quest'ultimo appartenga al semispazio $z < 0$
2. Si determinino gli estremi M , N di un diametro di S appartenente al primo e al terzo quadrante del piano yz, sapendo che il vettore $\overrightarrow{OM}$ forma un angolo di 30° con la direzione positiva dell'asse y.
3. Si determinino gli estremi della corda AB intercettata su Γ dal piano perpendicolare a MN nel suo punto medio
4. Si dica, motivando la risposta, se la seguente affermazione è vera o è falsa:

<<Fra tutti i triangoli aventi per vertici il punto M, il punto N e un punto P appartenente a Γ, quelli di area massima sono MNA e MNB>>

Soluzione

La superficie sferica S ha centro nell'origine del riferimento cartesiano e raggio

$$R = 4.$$

1. Il raggio r di una sezione, la cui area è uguale ai $\frac{3}{4}$ di un cerchio massimo, è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2}R = 2\sqrt{3}$.

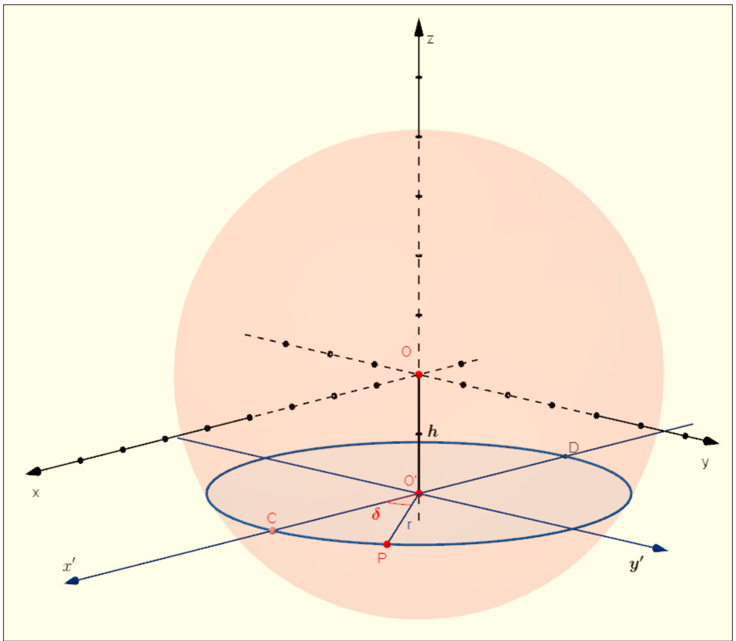


Fig.1

Il piano secante α , parallelo al piano xy *e situato nel semispazio* $z < 0$, ha equazione

$$\boldsymbol{z = h} \quad \textbf{con } \boldsymbol{h = -\sqrt{R^2 - r^2} = -\sqrt{16 - 12} = -2}$$

La circonferenza Γ può essere rappresentata come intersezione della superficie sferica S e del piano α

$$\boldsymbol{\Gamma} \begin{cases} \boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 =} & \mathbf{16} \\ \boldsymbol{z =} & \mathbf{-2.} \end{cases}$$

Per una rappresentazione parametrica ,consideriamo il generico punto di Γ $P(x, y, -2)$

In analogia con la consueta parametrizzazione di una circonferenza nel piano, si introduce l'angolo $C\hat{O}P = \delta$ ottenendo

$$\boldsymbol{P} \begin{cases} \boldsymbol{x =} & \boldsymbol{r\cos\delta} \\ \boldsymbol{y =} & \boldsymbol{r\ \sin\delta} \\ \boldsymbol{z =} & \mathbf{-2} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{x =} & \boldsymbol{2\sqrt{3}\ \cos\delta} \\ \boldsymbol{y =} & \boldsymbol{2\sqrt{3}\ \ \sin\delta} \\ \boldsymbol{z =} & \mathbf{-2} \end{matrix}$$

2.Le coordinate di M sono $(0, \mathrm{R}\cos\frac{\pi}{6}, \mathrm{R}\sin\frac{\pi}{6}) \rightarrow \boldsymbol{M(0{,}2\sqrt{3}, 2)}$

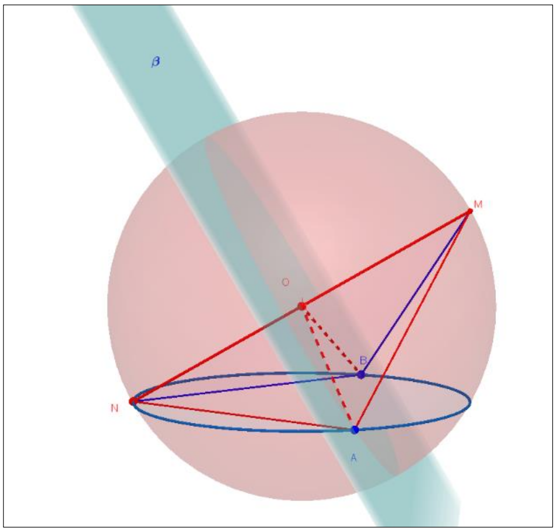
Le coordinate di N simmetrico di M rispetto ad O, sono $\boldsymbol{N(0{,}-2{,}\sqrt{3}, -2)}$

3. Il piano β ,perpendicolare a MN nel suo punto medio passa per $O(0{,}0{,}0)$ e la terna dei suoi parametri di giacitura (a, b, c) è proporzionale alla terna delle componenti di un vettore parallelo a MN, es. $(0, \sqrt{3}, 1)$.

Consideriamo, pertanto, il piano β di equazione $\sqrt{3}y + z = 0$ e, per determinare gli estremi della corda AB, da esso intercettata su Γ, risolviamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = & 16 \\ z = & -2 \rightarrow \\ \sqrt{3}y + z = & 0 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{4}{3} + 4 = 16 \rightarrow x^2 = \frac{32}{3} \rightarrow x = \pm\frac{4}{3}\sqrt{6}$$



Gli estremi della corda sono $\boldsymbol{A(\frac{4}{3}\sqrt{6}, \frac{2}{3}\sqrt{3}, -2)}$

Fig.2

$$\boldsymbol{B(-\tfrac{4}{3}\sqrt{6},\ \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\,, -2)}$$

4.L'affermazione è vera.

Dimostrazione.

a) Primo metodo

I triangoli di vertici MNP dove P è un punto di Γ , sono tutti rettangoli , essendo la superficie sferica S il luogo dei punti che vedono il segmento MN sotto un angolo retto.

Poichè hanno tutti la stessa ipotenusa, il valore massimo dell'area corrisponde alle posizioni di P per cui l'altezza PH assume valore massimo **(figura 2),** cioè se :

$$\boldsymbol{\overline{PH} = \overline{PO} = R \to H \equiv O \to PO \perp MN \to PO \in \beta.}$$

Le posizioni di P per cui l'altezza PH assume valore massimo sono

$$\boldsymbol{P \equiv A \quad \cup \quad P \equiv B}$$

b) Secondo metodo

Conoscendo le coordinate del generico punto di Γ (equazioni parametriche)

$$P\begin{cases} x = & r\cos\delta \\ y = & r\ \sin\delta \\ z = & -2 \end{cases} \to \begin{array}{l} x = \quad 2\sqrt{3}\ \cos\delta \\ y = \quad 2\sqrt{3}\ \ \sin\delta \\ z = \qquad -2 \end{array}$$

possiamo determinare, in funzione di δ le lunghezze dei cateti del triangolo PMN

$\boldsymbol{\overline{PM}} = \sqrt{r^2cos^2\delta + r^2(\sin\delta - 1)^2 + 16} = \sqrt{12cos^2\delta + 12sin^2\delta - 24\sin\delta + 28} =$

$\sqrt{12(\ cos^2\delta + sin^2\delta) - 24\sin\delta + 28} = \sqrt{\boldsymbol{40 - 24\sin\delta}}$

$\boldsymbol{\overline{PN}} = \sqrt{r^2cos^2\delta + r^2(\sin\delta + 1)^2} = \sqrt{\boldsymbol{24 + 24\sin\delta}}$

Poiché fra tutti i triangoli rettangoli di ipotenusa fissata , quello di massima area è rettangolo isoscele, imponiamo che $\overline{PM} = \overline{PN}$

$$\sqrt{40 - 24\sin\delta} = \sqrt{24 + 24\sin\delta} \to \qquad 48\sin\delta = 16 \to \sin\delta = \frac{1}{3}$$

$$\to \cos\delta = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

Le corrispondenti posizioni di P sono, pertanto

$$P_1\begin{cases} x = & r\cos\delta \\ y = & r\ \sin\delta \\ z = & -2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = & \frac{4}{3}\sqrt{6} \\ y = & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ z = & -2 \end{matrix} \rightarrow \boldsymbol{P_1 \equiv A}$$

$$P_2\begin{cases} x = & r\cos\delta \\ y = & r\ \sin\delta \\ z = & -2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = & -\dfrac{4}{3}\sqrt{6} \\ y = & \dfrac{2}{3}\sqrt{3} \\ z = & -2 \end{matrix} \rightarrow \boldsymbol{P_2 \equiv B}$$