SOLUZIONE

1. La funzione integranda è la seguente

$$y = \frac{e^t}{\sqrt{e^t - a}}$$

Se $a < 0$ la funzione integranda è sempre continua $\forall x \in R$;

Se $a = 0$ la funzione integranda è ancora continua $\forall x \in R$;

Se $a > 0$ la condizione di esistenza per lo studio della discontinuità è

$$e^t - a \neq 0 \quad \rightarrow \quad t \neq lna$$

Pertanto la funzione integranda ha una discontinuità di seconda specie per $t = lna$ e un asintoto verticale di equazione $t = lna$.

La funzione $F'_a(x)$ è la seguente:

$$F'_a(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - a}}$$

2. $F'(x)$ è la funzione avente come asintoto verticale la retta x=0 e quindi

$$F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$$

$F'(x)$ esiste per $x > 0$; è positiva nel suo dominio, ha un solo asintoto verticale di equazione x=0 che si deduce dal seguente limite:

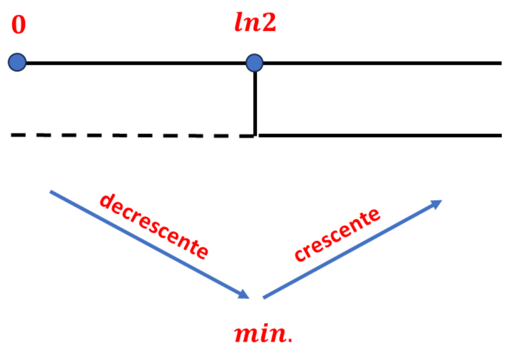
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} = +\infty$$

Riguardo alla monotonia, studiamo la derivata prima di $F'(x)$:

$$F''(x) = \frac{e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{(e^x - 1)^3}} \geq 0 \quad se \quad e^x \geq 2 \quad \rightarrow x \geq ln2$$



per cui la funzione è decrescente per

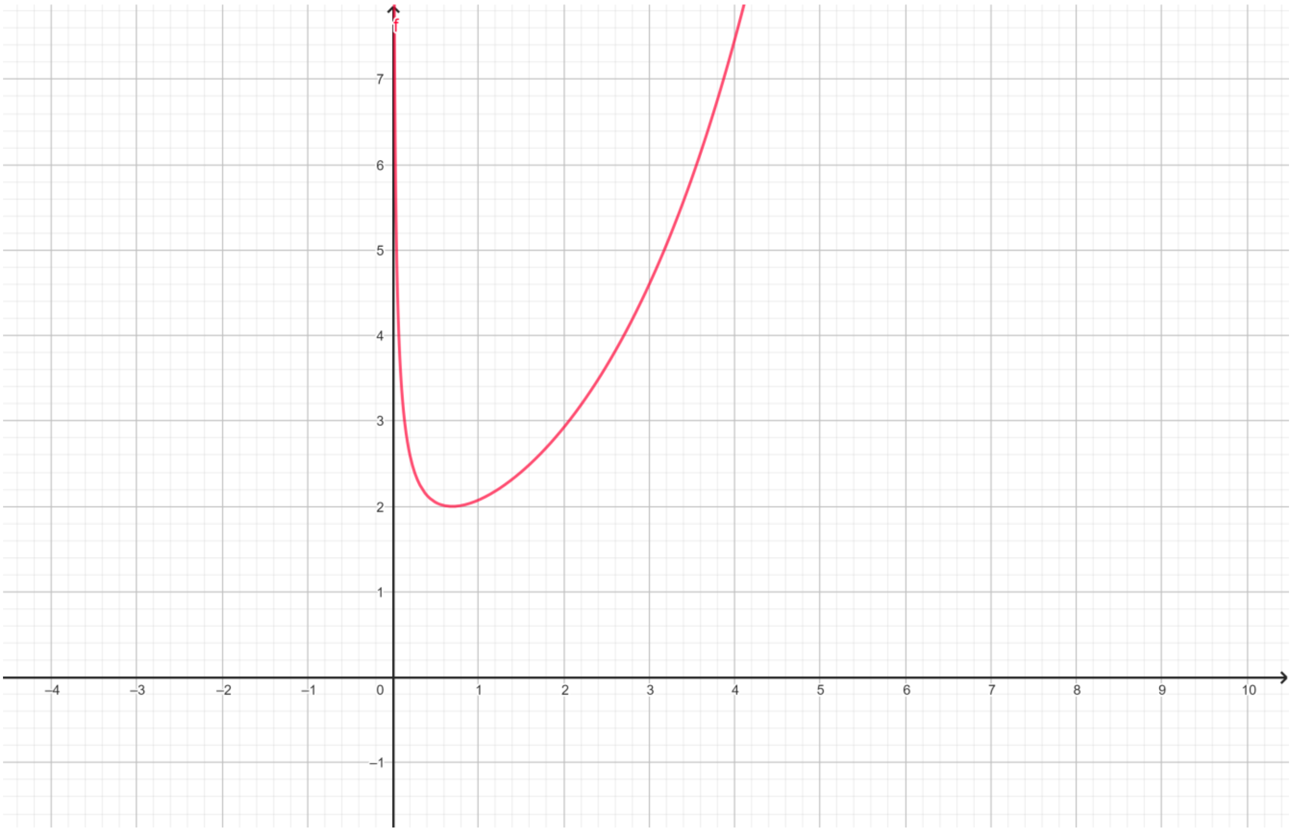
$$0 < x < ln2$$

e crescente per

$$x > ln2$$

L’estremo relativo è il seguente:

$$min(ln2{,}2)$$



3. Calcoliamo ora l’equazione della retta r del tipo $x = t$ sapendo che:

$$\int_0^t \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2$$

Si tratta di un integrale improprio, per cui riscriviamo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^t \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx = 2$$

Ponendo $e^x - 1 = y \quad da\ cui \qquad e^x dx = dy$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{e^\varepsilon - 1}^{e^t - 1} \frac{1}{\sqrt{y}} dx = 2$$

$$2 \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\sqrt{e^x - 1}\right]_{0+\varepsilon}^{t} = 2$$

$$2 \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sqrt{e^t - 1} - \sqrt{e^\varepsilon - 1}\right) = 2$$

$$2 \cdot \sqrt{e^t - 1} = 2$$

$$t = ln2$$

4. Determiniamo infine il volume del solido di rotazione che si ottiene ruotando la curva intorno all'asse x nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, ln2\right]$:

$$Volume = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{ln2} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx =$$

$$= \pi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{ln2} e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} dx =$$

$$\pi \cdot \left([e^x + x]_{\frac{1}{2}}^{ln2} + \int_{\frac{1}{2}}^{ln2} \frac{1}{e^x - 1} dx \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(e^{ln2} + ln2 - e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{ln2} \frac{1}{e^x - 1} dx \right) =$$

da cui ponendo

$$e^x - 1 = t$$

$$e^x dx = dt \quad \rightarrow \; dx = \frac{dt}{t+1}$$

il volume diventa:

$$Volume = \pi \cdot \left(2 + ln2 - \sqrt{e} - \frac{1}{2} + \int_{\sqrt{e}-1}^{1} \frac{1}{t \cdot (t+1)} dt \right) =$$

$$\frac{1}{t \cdot (t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$$

$$1 = A \cdot (t+1) + B \cdot t$$

$$1 = A \cdot t + A + B \cdot t$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = +1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} B = -1 \\ A = +1 \end{cases}$$

$$Volume = \pi \cdot \left(2 + ln2 - \sqrt{e} - \frac{1}{2} + \int_{\sqrt{e}-1}^{1} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(2 + ln2 - \sqrt{e} - \frac{1}{2} + \left[ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| \right]_{\frac{1}{2}}^{ln2} \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{3}{2} + ln2 - \sqrt{e} + ln \left| \frac{2-1}{2} \right| - ln \left| \frac{\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e}} \right| \right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{3}{2} - \sqrt{e} - ln \left| \frac{\sqrt{e} - 1}{\sqrt{e}} \right| \right)$$