Problema assegnato alla maturità scientifica nella sessione autunnale 1924

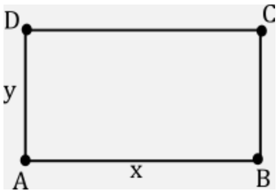
Antonino Giambò

TRACCIA.

Un rettangolo, ruotando successivamente di un giro completo intorno alla sua base ed alla sua altezza, genera due cilindri, la somma dei volumi dei quali è tripla del volume della sfera di raggio a. Sapendo che 2p è il perimetro del rettangolo, calcolare la base e l'altezza del rettangolo.

RISOLUZIONE.

Sia ABCD il rettangolo, nel quale siano x, y le lunghezze rispettivamente della base AB e dell'altezza AD.



Indicati con V_{AB} e V_{AD} i volumi dei cilindri generati dal rettangolo quando ruota di un giro completo una volta intorno ad AB e un'altra volta intorno a AD, si ha evidentemente:

$$V_{AB} = \pi\, \overline{AD}^2 \cdot \overline{AB} = \pi\, y^2 x\,, \quad V_{AD} = \pi\, \overline{AB}^2 \cdot \overline{AD} = \pi\, x^2 y\,.$$

Considerato che il volume della sfera di raggio a è $\frac{4}{3}\pi a^3$ e tenendo presente che deve essere x+y=p, il seguente sistema risolve il problema:

$$\begin{cases} x + y = p \\ x^2 y + x y^2 = 3 \cdot \dfrac{4}{3}\, a^3 \end{cases} \quad \text{vale a dire:} \quad \begin{cases} x + y = p \\ xy = \dfrac{4a^3}{p} \end{cases}$$

Com'è noto, il sistema, che è un sistema simmetrico nelle variabili x, y, è risolto dalla seguente equazione:

$$z^2 - p\,z + \frac{4\,a^3}{p} = 0\,.$$

Essa ammette due soluzioni a condizione che il suo discriminante Δ risulti non negativo. Siccome:

$$\Delta = p^2 - 4 \cdot \frac{4\,a^3}{p} = \frac{p^3 - 16\,a^3}{p}$$

si ha $\Delta \geq 0$ per $p^3 \geq 16\,a^3$ ossia per $p \geq 2\,a\,\sqrt[3]{2}$.

Le due soluzioni coincidono nel caso del segno di uguaglianza. Esse si trovano ovviamente risolvendo la precedente equazione, per cui risulta:

$$x_{1,2} = \frac{p \mp \sqrt{\Delta}}{2}\,.$$

In particolare, per Δ=0 si ha:

$$x_1 = x_2 = \frac{p}{2}\,.$$

Come dire che il rettangolo è in effetti il quadrato di lato $p/2$.

Si capisce che, trattandosi di un sistema simmetrico, se una soluzione è la coppia ordinata (x, y), l'altra soluzione è la coppia (y, x).

Se, tuttavia, si ammette legittimamente che sia x≥y, si ha una sola soluzione.

UN BREVE COMMENTO.

Come quello assegnato nella sessione ordinaria, anche questo problema non presenta difficoltà di alcun genere. Anzi è addirittura più semplice di quell'altro. Per la sua risoluzione infatti non si richiedono particolari intuizioni né conoscenze sofisticate di matematica, ma solamente nozioni del tutto elementari.