Problema assegnato alla maturità scientifica nella sessione ordinaria 1924

Antonino Giambò

TRACCIA.

Due circonferenze di raggi R ed r (R>r) sono tangenti internamente. Trovare sopra la tangente comune un punto tale che le rimanenti tangenti condotte per esso alle due circonferenze formino un dato angolo γ.

A quale condizione deve essere sottoposto γ affinché il problema sia possibile?

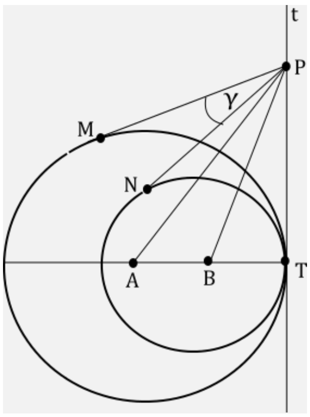
Si osservi che la differenza degli angoli che la tangente comune forma con le congiungenti il punto che si cerca coi centri dei circoli, eguaglia la metà di γ.

RISOLUZIONE.

Con riferimento alla figura sottostante, siano:

- la circonferenza di centro A e raggio AT=R,
- la circonferenza di centro B e raggio BT=r, tangente internamente all'altra circonferenza,
- t la tangente comune alle due circonferenza e T il punto di contatto,
- P il punto da trovare sulla tangente t,
- PM e PN le ulteriori tangenti alle due circonferenza condotte per P,

Sia infine γ l'angolo $M\widehat{P}N$ formato dalle due tangenti PM e PN.



Risulta:

$$M\widehat{P}T - N\widehat{P}T = M\widehat{P}N = \gamma\,, \quad A\widehat{P}T = \frac{1}{2}M\widehat{P}T, \quad B\widehat{P}T = \frac{1}{2}N\widehat{P}T.$$

Pertanto:

$$A\widehat{P}T - B\widehat{P}T = \frac{1}{2}\left(M\widehat{P}T - N\widehat{P}T\right) = \frac{\gamma}{2}.$$

Posto ora $\overline{TP}$=x, con x>0, si ha:

$$\tan A\widehat{P}T = \frac{\overline{AT}}{\overline{TP}} = \frac{R}{x}\,, \quad \tan B\widehat{P}T = \frac{\overline{BT}}{\overline{TP}} = \frac{r}{x}\,;$$

di conseguenza:

$$\tan\left(A\widehat{P}T - B\widehat{P}T\right) = \frac{\tan A\widehat{P}T - \tan B\widehat{P}T}{1 + \tan A\widehat{P}T \cdot \tan B\widehat{P}T} = \frac{\frac{R}{x} - \frac{r}{x}}{1 + \frac{R}{x}\cdot\frac{r}{x}} = \frac{(R-r)\,x}{x^2 + R\,r}.$$

Si ottiene, in questo modo, l'equazione risolvente del problema:

$$\frac{(R-r)\,x}{x^2 + R\,r} = \tan\frac{\gamma}{2},$$

vale a dire:

$$\tan\frac{\gamma}{2}\,x^2 - (R-r)\,x + R\,r\,\tan\frac{\gamma}{2} = 0\,, \ \text{con} \ \ x > 0.$$

L'equazione ammette radici reali, che in tal caso, se il suo discriminate non è negativo, sono radici positive dal momento che l'equazione presenta due variazioni.

Costatato allora che detto discriminante è:

$$\Delta = (\mathrm{R}-\mathrm{r})^2 - 4\,\mathrm{R\,r}\,\tan^2\frac{\gamma}{2},$$

risulta:

$$\Delta \geq 0 \quad \text{per} \quad (\mathrm{R}-\mathrm{r})^2 - 4\,\mathrm{R\,r}\,\tan^2\frac{\gamma}{2} \geq 0 \quad \text{ossia per} \quad 0 < \tan\frac{\gamma}{2} \leq \frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{2\sqrt{\mathrm{R\,r}}}.$$

In conclusione, il problema ammette due soluzioni per i valori di γ che soddisfano alla seguente condizione:

$$0 < \gamma \leq 2\arctan\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{2\sqrt{\mathrm{R\,r}}}.$$

Le due soluzioni coincidono nel caso del segno di uguaglianza. Esse si trovano ovviamente risolvendo la precedente equazione, per cui risulta:

$$\mathrm{x}_{1,2} = \frac{\mathrm{R}-\mathrm{r} \mp \sqrt{\Delta}}{2\,\tan\frac{\gamma}{2}}.$$

In particolare, per Δ=0, per cui $\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{2\sqrt{\mathrm{R\,r}}}$, si ha:

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 = \frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{2\,\frac{\mathrm{R}-\mathrm{r}}{2\sqrt{\mathrm{R\,r}}}} = \sqrt{\mathrm{R\,r}}.$$

Come dire che, in questo caso particolare, la posizione del punto P sulla retta t, ossia la lunghezza del segmento TP, è uguale alla media geometrica dei raggi delle due circonferenze.

UN BREVE COMMENTO.

Il problema è assolutamente semplice, oserei dire banale. Ci sarebbe stato per la verità un punto critico, ma è stato superato con l'informazione che chiude la traccia del problema. Per il resto, la risoluzione richiede alcune conoscenze di geometria elementare e di trigonometria, oltre a ricordare la semplice regola di Cartesio sul segno delle soluzioni di un'equazione di 2° grado. Insomma cognizioni matematiche che i maturandi del Liceo Scientifico non possono ignorare.