Il segmento sferico

Problema assegnato agli esami di licenza della sezione fisico matematica dell'Istituto tecnico, in epoca antecedente la Riforma Gentile.

Quanta parte della superficie terrestre (supposta sferica) sarebbe veduta da chi potesse elevarsi, sopra di essa, a un'altezza uguale al raggio? E a quale altezza dovrebbe elevarsi un osservatore per vedere la sesta parte della superficie terrestre?

In entrambi i casi trovare il volume del segmento veduto.

La porzione di superficie terrestre che entra nel campo visivo dell'osservatore O è quella interna ad un cono circolare retto, di vertice O, le cui generatrici sono tangenti alla superficie sferica.

Il luogo dei punti di tangenza è una circonferenza il cui piano divide la sfera in due segmenti sferici a una base.

Con riferimento alla **figura 1**, dobbiamo prendere in considerazione il segmento e la calotta sferica situati nel semispazio in cui si trova l'osservatore.

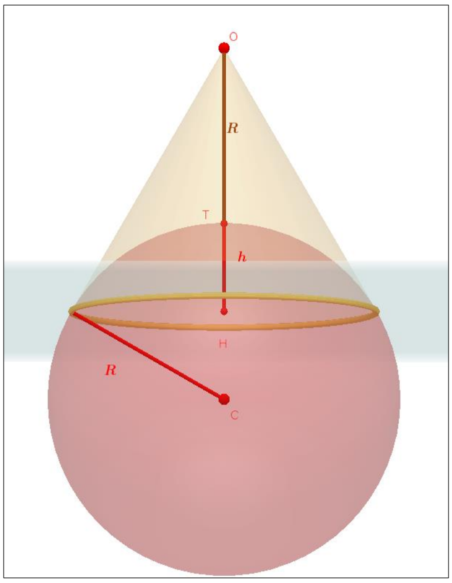
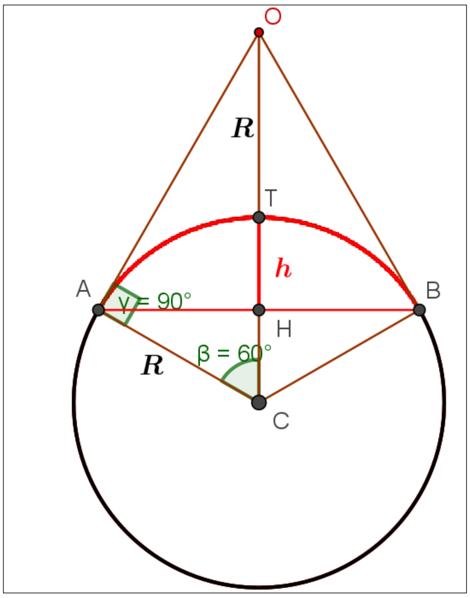


Fig.1



Fig,2

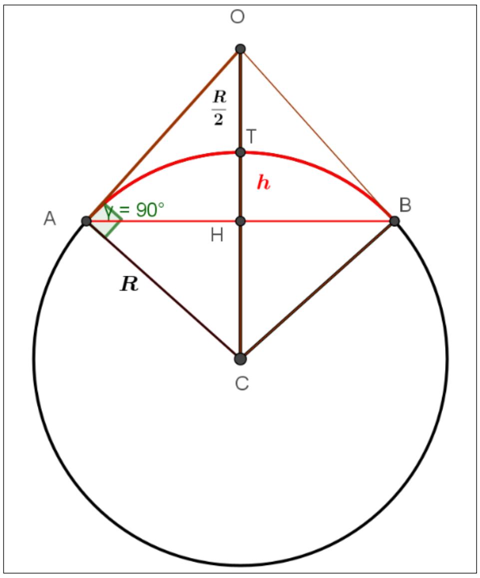


Fig. 3

L'area della calotta sferica è uguale a $2\pi Rh$, dove R è il raggio della sfera e h *il* valore dell'altezza della calotta.

Punto 1. Nella **figura 2** è rappresentata una sezione del solido ottenuta con un piano passante per l'asse di rotazione. E' facile osservare che

$$\overline{CO} = 2R \rightarrow A\hat{C}O = 60°$$

$$\overline{CH} = R\cos 60° = \frac{R}{2} \rightarrow \overline{TH} = \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2}} \rightarrow Area_{calotta} = 2\pi R\frac{R}{2} = \pi R^2$$

Essendo l'area della superficie sferica uguale a $4\pi R^2$, possiamo affermare che

un osservatore che si trovi ad un'altezza pari al raggio R, riuscirebbe a vedere un quarto della superficie terrestre.

Punto 2. Nel secondo caso(**figura 3**), essendo $Area_{calotta} = \frac{1}{6}4\,\pi R^2$, possiamo determinare il valore di h *tale che* $2\pi Rh = \frac{4}{6}\,\pi R^2 \rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{3}}$

La quota $\overline{TO}$ si determina applicando il primo teorema di Euclide al triangolo OAC

$$\overline{AC}^2 = \overline{HC} \cdot (\overline{CT} + \overline{TO})$$

Poiché $\overline{AC} = R$ e $\overline{HC} = R - h = \frac{2}{3}R$ si ottiene

$$R^2 = \frac{2}{3}R\,(R + \overline{TO}) \rightarrow \overline{\boldsymbol{TO}} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2}}$$

Un osservatore che vede la sesta parte della superficie terrestre si trova ad un'altezza pari alla metà del raggio R.

Punto 3. Per calcolare il volume del segmento sferico corrispondente a ciascuna delle due calotte precedentemente considerate, ricordiamo che

> Un segmento sferico a una base, di altezza h, appartenente a una sfera di raggio R (con $h < R$), è equivalente alla differenza tra un cilindro di raggio R e altezza h e un tronco di cono, di uguale altezza ,in cui R sia il raggio della base maggiore e $R - h$ il raggio della base minore

$$V_{cilindro} = \pi R^2 h$$

$$V_{tronco\ di\ cono} = \frac{1}{3}\pi h[(R^2 + R(R-h) + (R-h)^2)]$$

$$Volume_{segmento\ sferico} = \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h[(R^2 + R(R-h) + (R-h)^2)]$$

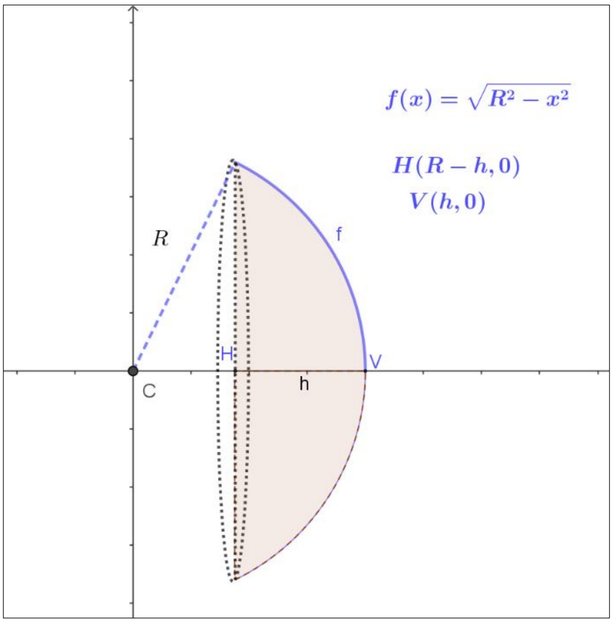
E' questo il noto risultato al quale si giunge applicando il principio di Cavalieri

(condizione sufficiente affinché due solidi, abbiano lo stesso volume)

Se ogni piano di un fascio di piani paralleli interseca due figure solide in due sezioni di uguale area , allora i due solidi hanno lo stesso volume.

Si può, comunque, interpretare in tal senso anche il risultato ottenuto con il calcolo integrale.(figura 4)

Il volume del segmento sferico può essere calcolato come solido ottenuto dalla rotazione di 180° intorno all'asse x, del segmento circolare compreso tra la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = R^2 \;\; e\, la\, retta \;\; x = R - h$



$\boldsymbol{Fig.4}$ $\quad Volume_{segmento\ sferico}$

$$\pi \int_{R-h}^{R} y^2\, dx = \pi \int_{R-h}^{R} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{R-h}^{R} =$$

$$\pi R^2 (R - R + h) - \frac{1}{3}\pi [R^3 - (R-h)^3] =$$

$$\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi [(R - R + h) \cdot (R^2 + R(R-h) + (R-h)^2)] =$$

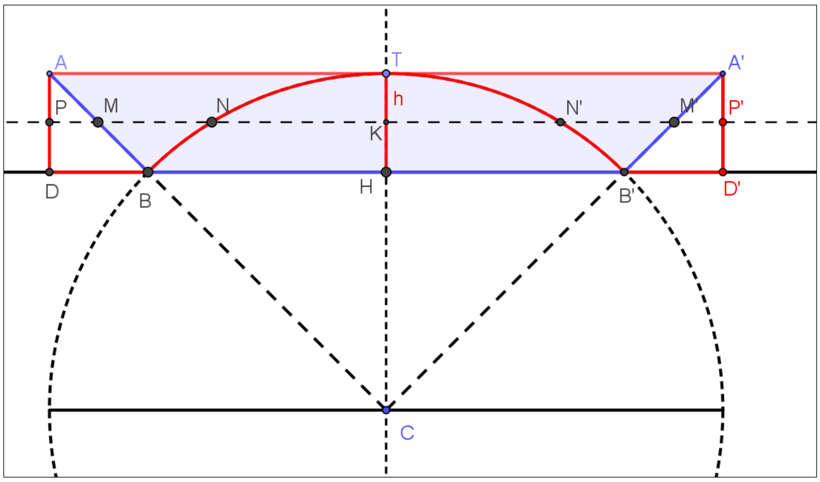
$$\boldsymbol{\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h}[(\boldsymbol{R^2 + R(R-h) + (R-h)^2})]$$

Semplificando l'espressione nella forma $\boldsymbol{\pi \frac{h^2}{3}(3R - h)}$

e sostituendo alla variabile **h** i due valori trovati precedentemente, si ha

$$\boldsymbol{V_1 = \pi\frac{R^2}{12}\left(3R-\frac{R}{2}\right) = \pi\frac{5}{24}R^3 \quad ; \qquad V_2 = \pi\frac{R^2}{27}\left(3R-\frac{R}{3}\right) = \pi\frac{8}{81}R^3}$$

Applicazione del principio di Cavalieri



Fig,5

In analogia con il teorema della scodella di Galilei, che permette di determinare il volume della semisfera, consideriamo i solidi generati da una rotazione di 180°intorno alla retta CT (con riferimento alla **figura 5**)

- dal rettangolo $AA'D'D$ (cilindro)
- dal trapezio $AA'B'B$ (tronco di cono)
- dal segmento circolare di base BB' e altezza HT (segmento sferico)

Si dimostra facilmente che ogni piano parallelo alla base della calotta che taglia il solido "scodella" lungo una corona circolare S_1, intercetta sul tronco di cono un cerchio S_2 di uguale area. Pertanto, il solido differenza tra il cilindro e il segmento sferico è equivalente al tronco di cono stesso.

Area corona circolare S_1 : $\pi(\overline{PK}^2 - \overline{NK}^2) = \pi(R^2 - R^2 + \overline{CK}^2) = \pi\overline{CK}^2$

Area cerchio S_2 : $\pi\,\overline{MK}^2 = \pi\overline{CK}^2$ *essendo il triangolo MKC rettangolo isoscele.*

Il solido differenza tra il cilindro e il segmento sferico è equivalente al tronco di cono; pertanto, il volume del segmento sferico è uguale alla differenza tra il volume del cilindro equello del tronco di cono.

Ritornando alla prima parte del, proponiamo, in alternativa a quella sintetica, una soluzione di tipo analitico, altrettanto semplice per uno studente che conosce la geometria del piano.

Limitandoci al **punto 2**, introduciamo un riferimento cartesiano Oxy,portandoci nell'ambito della geometria piana, dopo aver determinato l'altezza $\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{3}}$

della calotta, e tralasciando il contesto reale del problema. **(figura 6)**

L'origine è il centro della circonferenza, l'asse y è la retta che congiunge l'osservatore con il centro della terra. Il raggio può essere considerato unitario

Nel suddetto riferimento l'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 = 1$, la retta AB ha equazione $y = \frac{2}{3}$ e incontra la circonferenza nei punti $A\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

La retta tangente in B alla circonferenza è perpendicolare alla retta del raggio OB, il cui coefficiente angolare è $m = \frac{2}{\sqrt{5}}$, pertanto la sua equazione è

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

Il suo punto di incontro con l'asse y , che indicheremo con O', ha coordinate $O'(0, \frac{3}{2})$ e la sua distanza dal punto T $(0,1)$ è uguale a $\frac{1}{2}$,

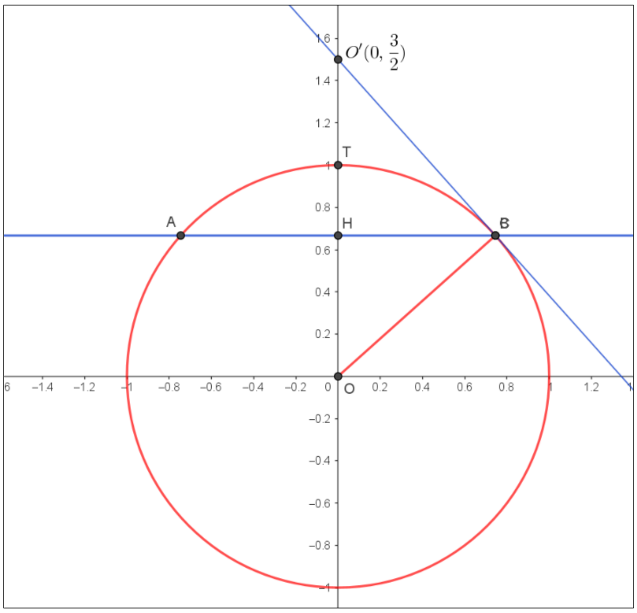


Fig. 6

Ritornando al contesto reale, possiamo affermare che l'osservatore che vede la calotta di altezza $h = \frac{R}{3}$, si trova a distanza $\frac{R}{2}$ dalla superficie terrestre.