TEOREMA DI NICOMACO

Giuseppe Zollo - Antonella Zollo

La scoperta di questo Teorema viene attribuita allo studioso greco antico Nicomaco di Gerasa (Filosofo e Matematico, vissuto a Gerasa (Giordania) nel periodo I-II secolo d.C.).

Enunciato del Teorema:

La somma dei cubi dei successivi numeri naturali, da 1 ad n, uguaglia il quadrato della somma dei numeri stessi:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Dimostrazione 1.

1.1 Calcolo dei termini dello sviluppo del cubo di un generico numero naturale, *n.*

Iniziamo ricordando che qualunque potenza del numero *1* coincide col numero stesso, per definizione, e scriviamo $1^3 = 1 = 1^2$

Le successive potenze si possono sviluppare tenendo conto della proprietà, già nota a Nicomaco, che consente di scrivere il cubo di un numero come somma di successivi numeri dispari.

In particolare, si ha: $2^3 = 8 = 3 + 5.$ Per i numeri successivi, possiamo scrivere:

$$3^3 = 27 = 7 + 9 + 11$$

$$4^3 = 64 = 13 + 15 + 17 + 19$$

E, così di seguito, sino al cubo del numero *n.*

Ad esempio, scriviamo i primi quattro termini della serie sostituendo le potenze per mezzo del loro sviluppo come somma di numeri dispari successivi:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19)$$

Abbiamo inserito le parentesi per evidenziare meglio la sostituzione.

In particolare, mettiamo in risalto che al **primo** termine, 1^3 , corrisponde il numero 1.

Al **secondo** numero, $2^3,$ corrisponde la somma dei **due** numeri 3 e 5; al **terzo** numero, 3^3 , corrisponde la somma dei **tre** numeri 7, 9, 11.

In generale, scriviamo l'uguaglianza:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + \cdots + n^3.$$

A questo punto calcoliamo lo sviluppo del cubo del numero *n.*

Allo scopo, consideriamo la successione di numeri dispari:

$U_1 = 1; U_2 = 3; U_3 = 5;\ U_4 = 7; \ldots\ldots\ldots\ldots U_r = 2r - 1,$

dove ogni termine si può ottenere dal precedente aggiungendo il numero *2*.

Dall'osservazione dello sviluppo di 4^3 *,* emerge che l'ultimo termine, *19,* coincide con il decimo numero dispari, ossia:

$$U_{\mathbf{10}} = 19 = 2 * \mathbf{10} - 1$$

Nello sviluppo di 3^3 *,* l'ultimo termine, 11, coincide con il sesto numero dispari:

$$U_{\mathbf{6}} = 11 = 2 * \mathbf{6} - 1.$$

Al numero $5 = U_{\mathbf{3}} = 2 * \mathbf{3} - 1$ corrisponde il terzo numero dispari, mentre al numero 1 corrisponde se stesso.

I numeri 1, 3, 5, 10 sono i primi quattro numeri triangolari.

Allora, possiamo concludere che l'espressione $U_r = 2r - 1$ che fornisce il numero dispari di ordine *r,* consente di associare allo stesso *r* il corrispondente *numero triangolare.*

Altri esempi potrebbero rafforzare la convinzione della validità di quanto appena detto, per cui riteniamo di poter affermare che all'ennesimo numero triangolare,

$$T_n = \frac{\boldsymbol{n*(n+1)}}{\mathbf{2}},$$

corrisponde il numero dispari di ordine *n,*

$$U_n = 2 * \frac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\mathbf{2}} - 1 = n^2 + n - 1.$$

E, quindi l'espressione $n^2 + n - 1$ rappresenta l'ultimo termine dello sviluppo del cubo di un qualunque numero, *n.*

L'ultimo termine dell'*(n-1)* -esimo numero triangolare, è:

$$U_{n-1} = 2 * \frac{(n-1)*(n-1+1)}{2} - 1$$

$$= 2 * \frac{(n-1)*n}{2} \text{ -1 = n*(n-1) -1=}$$

$$= n^2 - n - 1.$$

Il suo successivo, $n^2 - n - 1 + 2 = n^2 - n + 1$ è il primo termine dello sviluppo del cubo del numero *n.*

Lasciamo al lettore il piacere di verificare che il primo e l'ultimo termine sono dispari.

Il generico numero dispari compreso tra questi due estremi sarà del tipo:

$$n^2 - n + 1 + 2k$$

con *k =1, 2..., (n-2).*

Quindi per ogni valore del numero *n,* il parametro *k* assumerà tutti i valori da 1 sino (a *n-2).*

Mostriamo che la somma del primo termine con l'ultimo e con gli *(n-2)* termini tra essi compresi vale proprio il cubo del generico numero *n*.

Infatti, si ha:

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 + n - 1) + \sum_{1}^{n-2}(n^2 - n + 1 + 2k) =$$

$$= 2n^2 + (n^2 - n + 1) * \sum_1^{n-2} 1 + 2 * \sum_1^{n-2} k =$$

$$= 2n^2 + (n-2) * (n^2 - n + 1) + 2 * \left(\frac{(1 + n - 2) * (n-2)}{2}\right) =$$

$$= 2n^2 + n^3 - n^2 + n - 2n^2 + 2n - 2 + (n-1) * (n-2) =$$

$$= n^3 - n^2 + 3n - 2 + n^2 - 3n + 2 = n^3.$$

A scopo esemplificativo, e per confermare i risultati già noti, proponiamo la tabella del calcolo di alcuni termini:

n	$n-2$	k	$n^2 - n + 1$	$n^2 - n + 1 + 2k$	$n^2 + n - 1$
1	-1	0	1	0	1
2	0	0	3	0	5
3	1	1	7	9	11
4	2	1,2	13	15, 17	19
5	3	1, 2, 3	21	23, 25, 27	29
6	4	1, 2, 3, 4	31	33, 35, 37, 39	41
7	5	1, 2, 3, 4, 5	43	45, 47, 49, 51, 53	55

Le espressioni dell'ultimo termine consentono di scrivere le uguaglianze:

$1 = 2 * \mathbf{1} - 1$; 5 = 2 * **3**-1; 11 = 2 * **6**-1…………; $n^2 + n - 1 = 2 * \boldsymbol{T_n} - 1$,

dove $1, 3, 6, \ldots \ldots . . T_n$ sono numeri triangolari di ordine 1, 3, 6, ……, *n*.

Dall'ultima espressione $n^2 + n - 1 = 2 * T_n - 1$, si ricava $T_n = \frac{n*(n+1)}{2}$

che consente di trovare il numero triangolare conoscendo l'ordine dello stesso.

Per esercizio, calcoliamo il valore di 7^3 come somma dei numeri $43 + 45 + \cdots + 55$.

I sette numeri vengono prelevati dalla tabella precedente e la loro somma rappresenta una scomposizione, mediante la somma, della stessa potenza.

Possiamo calcolare la suddetta somma, ad esempio, valutando prima la somma dei numeri dispari da 1 a 55 e sottraendo poi la somma dei dispari da 1 a 41.

Sappiamo che la somma di *n* numeri dispari da 1 a (2*n-*1*) vale n^2, quindi è necessario calcolare il numero *n* degli addendi. Questo risultato è noto dai tempi di Ipsicle (Matematico e Astronomo, Alessandria, II-I secolo a.C.).

Nell'esempio proposto, escludendo per adesso il numero 1, tra 2 e 55 vi sono 27 coppie e queste sono: (2, 3); (4, 5); ………; (54, 55). Siccome partono da 2, si deve aggiungere anche il numero1.

In totale, i numeri dispari da sommare sono $\frac{1+55}{2}$ = 28.

Ma la somma dei 28 numeri dispari, $1 + 3 + 5 + \cdots + 55 = 28^2$.

Per i numeri dispari compresi tra 1 e 42, si devono considerare le coppie:

$$(1, 2); (3, 4); \ldots\ldots (41, 42).$$

In questo caso, le coppie sono in numero di $\frac{1+41}{2} = 21$ e, 21 sono i numeri dispari da sommare.

Allora la somma dei dispari dal numero 1 al numero 41 è:

$$1 + 3 + 5 \ldots\ldots. +41 = 21^2.$$

Infine, scriviamo che:

$$7^3 = 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 = 28^2 - 21^2 = 343.$$

Proponiamo un altro esempio, per rafforzare quanto già espresso in precedenza, esprimendo come differenza tra due quadrati il numero 2^3. Si ha:

$$2^3 = 8 = 3 + 5.$$

Calcolo del numero di termini e della loro somma.

I termini sono $\frac{1+5}{2}$ = 3; la somma vale $[\frac{1+5}{2}]^2 = 3^2$= 9. Questo è il quadrato esterno.

Per il quadrato minore, si ha soltanto 1^2.

Allora possiamo scrivere:

$$2^3 = 3^2 - 1^2.$$

Le uguaglianze precedenti consentono di visualizzare che:

- il cubo di un numero *n* può essere scritto sempre come somma di *n* termini;
- il cubo di un numero si può scrivere sempre come differenza di due quadrati;
- la differenza tra le basi dei numeri al quadrato uguaglia la base del numero al cubo.

La prima affermazione è già nota; la seconda sarà oggetto di chiarimento più avanti.

Per la terza, presentiamo il caso generale.

Una successione di numeri dispari consecutivi con primo termine l'unità, può essere scritta in generale come:

$$1 + +3 + 5 + \cdots + (n^2 - n - 1) + [(n^2 - n + 1) + \sum_{1}^{n-2}(n^2 - n + 1 + 2k) + (n^2 + n - 1)]$$

dove gli *n* numeri in parentesi quadra rappresentano lo sviluppo del cubo del numero *n*, mentre l'espressione che la precede si riferisce al numero dispari che precede il primo dispari di n^3.

Per verificare la terza proprietà di cui sopra, calcoliamo quanti sono i numeri dispari nella parentesi quadra e quanto vale la loro somma.

Procedendo come negli esempi, vediamo prima quanti numeri dispari sono contenuti nella parentesi. I numeri dall'unità all'ultimo sono:

$$\frac{1 + (n^2 + n - 1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2};$$

La loro somma, trattandosi di somma di numeri dispari successivi, compresa l'unità, vale il quadrato del numero dei termini, cioè:

$$[\frac{n^2 + n}{2}]^2$$

Analogamente, per i numeri dall'unità a quello che precede la parentesi quadra, il numero dei termini è $\frac{1+(n^2-n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ e la somma vale il quadrato di questa espressione.

La differenza tra la somma dei numeri dall'unità sino all'ultimo, con quella dall'unità al numero che precede la parentesi quadra coincide con la base del cubo, infatti, si ha:

$$\frac{n^2+n}{2} - \frac{n^2-n}{2} = n;$$

La differenza tra i quadrati delle espressioni uguaglia il cubo del numero *n*, cioè possiamo scrivere:

$$n^3 = (\frac{n^2 + n}{2})^2 - (\frac{n^2 - n}{2})^2.$$

1.2 Dalla somma di cubi al quadrato di una somma.

Riprendiamo in considerazione l'enunciato del Teorema scritto in forma estesa

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + \cdots + n^2 + n - 1.$

e raggruppando i termini a partire dall'unità, e ricordando che la somma di n numeri consecutivi dispari è uguale al quadrato del numero dei termini, possiamo scrivere le relazioni:

$1 = 1^2;$

$1 + 3 = 2^2 = (\frac{1+3}{2})^2;$

$1+3+5 = 3^2 = (\frac{1+5}{2})^2;$

$1+3+5+7 = 4^2 = (\frac{1+7}{2})^2;$

……………………………………

Estendendo la somma sino all'ultimo termine, otteniamo:

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + (n^2 + n - 1) = [\frac{1+(n^2+n-1)}{2}]^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n*(n+1)}{2}\right)^2.$

Ma $\frac{n*(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n\,.$

Allora $\left(\frac{n*(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2$

Quindi posiamo scrivere

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2.$

Questa è una delle dimostrazioni che usa la proprietà secondo la quale l'n-esimo cubo può essere espresso come somma di n numeri dispari consecutivi (C. Wheatstone, 1854).

Appendice.

Scritta l'identità:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = 1 +^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 + n^3,$

isolando il termine n^3, scriviamo:

$n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 - (1 +^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3),$

sostituendo la somma dei cubi, possiamo scrivere:

$n^3 = (1+2+3+4+\cdots+n)^2$ - $((1+2+3+4+\cdots+n-1)^2$

E, quindi

$n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2 - [\frac{n(n-1)}{2}]^2 = (T_n)^2 - (T_{n-1})^2$

dove T_n e T_{n-1} sono i numeri triangolari di ordine *n* ed *n-1*.

Allora, resta dimostrato che:

*il cubo di un qualunque numero naturale si può calcolare come differenza tra due quadrat*i.

A riepilogo di quanto esposto, proponiamo la tabella per i primi dieci valori del numero *n*.

n	n^3	valore	$(T_n)^2 - (T_{n-1})^2$	T_n	$a_1 = 2 * T_{n-1} + 1$	$a_n = 2 * T_n - 1$	
1	1^3	1 = 1- 0	$1^2 - 0^2$	1	0	1	
2	2^3	8 = 9-1	$3^2 - 1^2$	3	3	5	
3	3^3	27 = 36-9	$6^2 - 3^2$	6	7	11	
4	4^3	64 = 100-36	$10^2 - 6^2$	10	13	19	
5	5^3	125 = 225-100	$15^2 - 10^2$	15	21	29	
6	6^3	216 = 441-225	$21^2 - 15^2$	21	31	41	
7	7^3	343 = 784-441	$28^2 - 21^2$	28	43	55	
8	8^3	512 = 1296-784	$36^2 - 28^2$	36	57	71	
9	9^3	729 = 2025-1296	$45^2 - 36^2$	45	73	89	
10	10^3	1000 = 3025-2025	$55^2 - 45^2$	55	91	109	

Per quanto riguarda le formule per il calcolo del primo e dell'ultimo termine, è sufficiente richiamare la tabella di pag.3 e tenere presente che il primo termine è il successivo dell'ultimo termine del cubo di $(n-1)$.

Per concludere, calcoliamo quanti sono i termini che danno il cubo di 123 e quale è la loro somma.

$$T_{123} = \frac{123 * 124}{2} = 7626,$$

$$T_{122} = T_{123} - 123 = 7503.$$

Allora, si ha:

$$a_1 = 2 * 7503 + 1 = 15007;$$

$$a_{123} = 2 * 7626 - 1 = 15251.$$

Il numero dei termini è

$$T_{123} - T_{122} = 7626 - 7503 = 123;$$

I termini vanno da $15007, \dots \dots \dots .., 15251$.

La loro somma vale $1860867 = 123^3 = (\frac{15251+1}{2})^2 - (\frac{15007-1}{2})^2$.

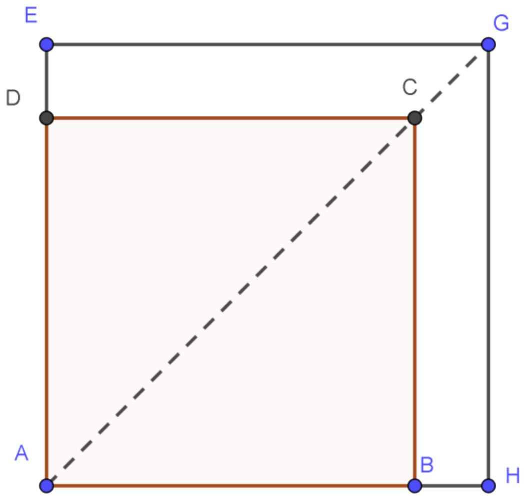
Dimostrazione 2.

Per condurre questa verifica, dobbiamo prima introdurre il concetto di *gnomone piano.*

Def.: Lo gnomone è una figura a squadra compresa fra due quadrati aventi un vertice e una diagonale in comune. Nella figura è l'area compresa nel poligono *BHGEDCB.*

Indicato con G_h lo gnomone di altezza h, lato interno l, e lato esterno L. Per definizione, si pone:

- $h = L - l$;
- $G_h = L^2 - l^2 = (L - l)(L + l) = h(L + l)$



2.1 Numeri cubici, numeri triangolari e gnomone.

Scritto $n^3 = n^2 * n$, consideriamo il cubo del numero n come un rettangolo di lati n^2ed n, con altezza $h = n$.

Indichiamo con G_n lo gnomone di altezza n e lati L ed l, con $h = L - l$.

Con riferimento alla Fig.1, sia ABCD il rettangolo di base $n^2 = AB$ ed altezza $h = n = AC$.

Staccato il segmento $BG = n$ sul lato AB, dividiamo in due parti uguali la restante parte $AG = n^2 - n$, e componiamo lo gnomone.

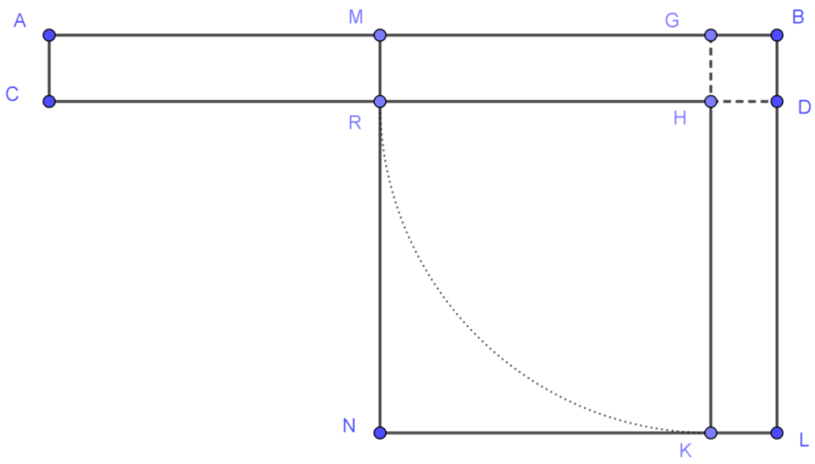


Fig.1

Sul prolungamento del segmento GH riportiamo il segmento $HK = HR$ e costruiamo il rettangolo $HKLD$, congruente al rettangolo $RHGM$.

I quadrati $LNMB$ e $KNRH$ individuano lo gnomone cercato.

Passando alle misure, si ha:

$$l = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$L = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Allora possiamo scrivere che:

$$l = T_{n-1} \text{ ed } L = T_n.$$

Con $T_n = \frac{n^2+n}{2}$ numero triangolare di ordine n, e $T_{n-1} = \frac{n^2-n}{2}$ suo precedente.

Per quanto detto in prima, si ha che:

l'area dello gnomone sarà uguale alla differenza dell'area del quadrato $LNMB$ con il quadrato *KNRH*, e cioè:

$$n^3 = {T_n}^2 - {T_{n-1}}^2 .$$

Quindi, diciamo che:

IL cubo di un numero naturale è sempre esprimibile come differenza tra il quadrato del triangolare di pari lato e il quadrato del triangolare che lo precede.

L a stessa relazione si può ricavare algebricamente. Infatti, ricordato che:

$$n = T_n - T_{n-1} \text{ ed } n^2 = T_n + T_{n-1}$$

sono due relazioni tra i numeri triangolari, è sufficiente moltiplicare membro a membro per conseguire il risultato precedente.

2.2 Aree e numeri.

La Fig. 2 rappresenta una successione di gnomoni di altezza crescente, iniziando dal quadrato di lato uno. Le altezze successive riportate sugli assi coordinati misurano 2, 3, 4,….(.unità), rispettivamente.

Il quadrato di lato uno, *OEDA* è di area unitaria, essendo $T_1 = OE = 1$

In questo caso la relazione che lega l'estensione dello gnomone con i numeri triangolari è

$$1^3 = {T_1}^2 - {T_0}^2 = 1^2 - 0 = {T_1}^2 = 1.$$

Il secondo gnomone è rappresentato dal poligono *EHGFADE*, di lati $L = FG = T_2; l = AD = T_1$.

Questa volta la relazione è: $2^3 = {T_2}^2 - {T_1}^2 = 3^2 - 1^2.$

Per il terzo gnomone, coincidente col poligono $HNMLFGH$, i lati sono $L = LM = T_3; l = FG = T_2$.

L'area sarà data da $3^3 = {T_3}^2 - {T_2}^2 = 6^2 - 3^2.$

Sommando a sinistra e a destra otteniamo:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = {T_3}^2$$

Gli esempi esposti servono per illustrare anche i legami che intercorrono tra i vari gnomoni.

Infatti, il punto O è comune a tutti, così come la diagonale, con l'origine in esso.

In particolare, mettiamo in risalto che, il lato *FG* è lato maggiore per il calcolo di 2^3 , ma risulta lato minore per il calcolo di 3^3.

Estendendo il ragionamento si può concludere che lo stesso lato T_n è lato maggiore per il calcolo di

n^3, ma risulta lato minore per il calcolo di($n + 1)^3$.

Quindi i lati dei vari gnomoni hanno una funzione di cerniera (chiusa) per gli stessi, per questo motivo la serie degli gnomoni equivalenti ai cubi dei successivi numeri naturali è continua nel piano.

Presi in considerazione i primi due gnomoni, l'area totale, *S*, da essi occupata è la somma delle aree dei singoli gnomoni e cioè:

$$S = S(1) + S(2).$$

Ma

$$S(1) = 1 = T_1{}^2 = 1^3 \,;$$

$$S(2) = T_2{}^2 - T_1{}^2 = 2^3.$$

Dunque

$$S = S(1) + S(2) = 1^3 + 2^3.$$

Allora, abbiamo che $S = T_1{}^2 + T_2{}^2 - T_1{}^2 = T_2{}^2.$

Ricordiamo che per definizione, in generale, si pone:

$$T_n = (1 + 2 + 3 + \cdots n)$$

E, in questo caso sarà:

$$T_2 = (1 + 2)$$

In conclusione, otteniamo che:

$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$$

Se gli gnomoni fossero i primi tre, avremmo che la superficie totale sarebbe:

$$S = S(1) + S(2) + S(3) = T_2{}^2 + S(3) = T_2{}^2 + T_3{}^2 - T_2{}^2 = T_3{}^2.$$

Dunque

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3$$

Allora, in conclusione scriviamo:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$$

Non è difficile immaginare risultati generali del tipo: $S = T_n{}^2$.

Ma

$$T_1 = 1; T_2 = 1 + 2;\ T_3 = 1 + 2 + 3; \ldots\ldots T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Ancora una volta, possiamo scrivere che:

$$1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots n)^2 = T_n{}^2$$

Ossia:

$$\textstyle\sum_1^n k^3 = (\sum_1^n k)^2 = T_n{}^2 \,.$$

Riteniamo corretto citare il Matematico Arabo Abu Bakr Al-Karaji (Baghdad, Iraq, X secolo.) per aver usato un metodo simile per calcolare la somma dei cubi dei numeri successivi.

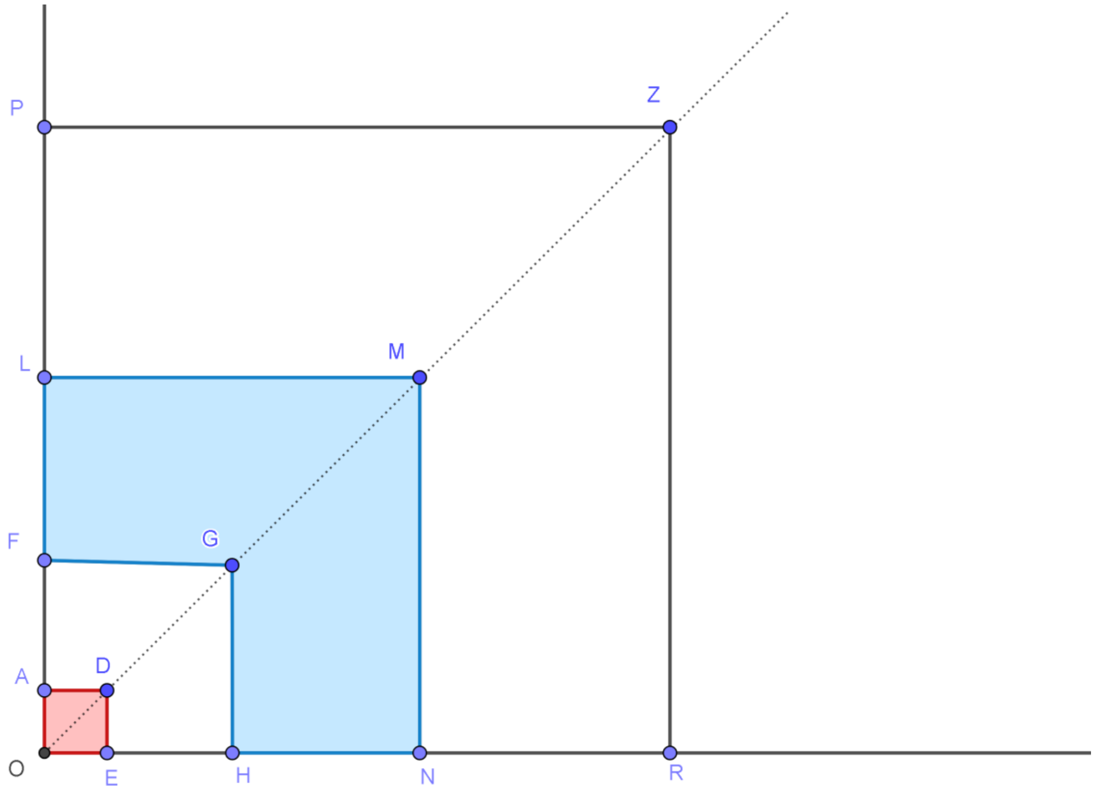


Fig. 2

Bibliografia

[1] L. Hogben-Il cammino della Scienza. La Matematica. Sansoni, Firenze. 1962;

[2] E. Picutti-Sul numero e la sua storia. Universale Feltrinelli Economica, Milano. 1977;

[3] Carl B. Boyer- Storia della Matematica. ISEDI, Milano. 1976;

[4] G. Loria. Storia delle Matematiche. U. Hoepli, Milano. 1982;;

[5] Pubblicazioni MAA, Janet Beery, University of Redlands;

[6] A. Giambò. L'induzione Matematica.- Matmedia.it.

….