Area di un segmento parabolico

di Antonino Giambò

1. In questo articolo mi propongo di mostrare la regola per l'area di un segmento parabolico, spiegandone la genesi e il relativo sviluppo, a partire dai primi risultati ottenuti da Archimede fino a quelli conseguiti con il ricorso al Calcolo Integrale.

Enuncio subito la regola per tale area, ma prima chiariamo cos'è un segmento parabolico.

Sia data la parabola p di vertice V e asse di simmetria VH (figura 1). Condotta per H la retta r perpendicolare a VH, si dicano A, B i punti intersezione di questa retta con la parabola. La regione piana compresa fra la parabola e la retta si denomina *segmento parabolico*. I segmenti AB e VH si chiamano rispettivamente *base* e *altezza* del segmento parabolico.

Ebbene, vale la seguente regola.

REGOLA.

L'area S di un segmento parabolico è uguale ai 2/3 dell'area del rettangolo avente per dimensioni la base b e l'altezza h del segmento parabolico.

Vale a dire:

$$S = \frac{2}{3}\, b\, h\,.$$

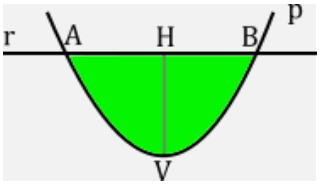

figura 1

Questa regola è denominata a volte "regola di Archimede" (più precisamente, "prima regola di Archimede" poiché si parla anche di una "seconda regola di Archimede", che riguarda il volume di un paraboloide di rotazione). Il che è perlomeno strano, considerato che Archimede ha formulato regole per le misure di molte figure geometriche, come per esempio cerchio, sfera, ellisse, ellissoide, eccetera.

Per la verità, quello di Archimede non è esattamente l'enunciato espresso sopra.

Lo riporto nella traduzione di Attilio Frajese.

Dall'opera *Quadratura della parabola*, Proposizione 17 [1, pag. 504] (Prima regola di Archimede):

[...] qualunque segmento compreso da una retta e da una parabola [1] *è quattro terzi del triangolo avente la stessa base della sezione e altezza uguale.*

Vale a dire, nel nostro linguaggio simbolico:

$$S = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\, b\, h \quad \text{e quindi } S = \frac{2}{3}\, b\, h\,.$$

2. Ci occupiamo adesso più a fondo di questa regola.

La determinazione della formula dell'area di un segmento parabolico con l'utilizzo del calcolo integrale è piuttosto semplice. La andiamo a vedere.

Scegliamo anzitutto un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che la parabola assegnata p abbia equazione $y = a\,x^2$, con $a>0$ (figura 2).

---

[1] Archimede, in realtà, non usa il termine "parabola" ma la perifrasi "sezione del cono rettangolo".
Un cono rettangolo è un cono la cui sezione meridiana è un angolo retto e la sezione di cui parla Archimede è quella ottenuta conducendo una perpendicolare ad una sua generatrice.

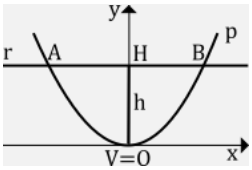

figura 2

La retta r, parallela all'asse x, condotta ad una distanza h da esso, ha equazione y=h. Di modo che i punti A, B hanno le seguenti ascisse, ottenute risolvendo l'equazione a x^2=h:

$$x_A = -\sqrt{\frac{h}{a}}, \quad x_B = \sqrt{\frac{h}{a}}.$$

Cosicché, essendo evidentemente h l'altezza del segmento parabolico compreso fra la parabola p e la retta r, la base b è la seguente:

$$b = 2\sqrt{\frac{h}{a}}.$$

Detto ciò, l'area S del segmento parabolico è data, per evidenti ragioni di simmetria, dal doppio dell'area del triangolo mistilineo OHB, vale a dire:

$$S = 2\int_0^{\sqrt{h/a}} (h - a\,x^2)\,dx = 2\left[h\,x - a\,\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{h/a}} = 2\left(h\sqrt{\frac{h}{a}} - \frac{a}{3}\cdot\frac{h}{a}\sqrt{\frac{h}{a}}\right) = \frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{\frac{h}{a}}\cdot h = \frac{2}{3}\,b\,h\,.$$

3. A questa formula, prima della suddetta rigorosa dimostrazione, erano pervenuti altri studiosi, a partire da Archimede, ma non sempre con ragionamenti ineccepibili sul piano della logica.

Incominciamo ad occuparci del lavoro di Archimede.

Il grande scienziato siracusano, nell'opera *Quadratura della parabola*, dopo una lunga premessa, fatta di 15 proposizioni debitamente dimostrate, perviene alla proposizione 16, che è l'anticamera della formula che esprime l'area di un segmento parabolico.

Proposizione 16 [1, pagine 501 e seguenti].

Sia […] il segmento [parabolico] BHC compreso da una retta e da una parabola [2], e si conduca per il [punto] B la BD parallela al diametro, e da C la CD tangente alla parabola nel [punto] C; e sia l'area F la terza parte del triangolo BCD. Dico che il segmento parabolico BHC è uguale all'area F.

Ossia, indicata con Q l'area del triangolo BDC e con S l'area del segmento parabolico BHC (figura 3), si ha:

$$Q = 3\,S.$$

Archimede dimostra che "il segmento parabolico BHC è uguale all'area F" servendosi del metodo di esaustione, dimostrando cioè che l'area del segmento parabolico non può essere maggiore né minore dell'area F.

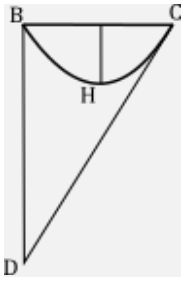

figura 3

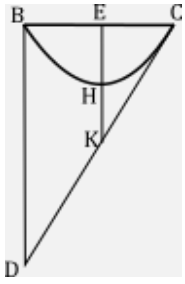

figura 4

Utilizzando il risultato della proposizione 16, Archimede dimostra la proposizione 17.

[2] Vedi nota 1

.

Proposizione 17 [1, pagine 504-505].

Essendo ciò stato dimostrato, è manifesto che qualunque segmento compreso da una retta e da una parabola [3] *è quattro terzi del triangolo avente la stessa base della sezione e altezza uguale.*

Dimostriamo questa proposizione traducendo nel nostro linguaggio, anche simbolico, la dimostrazione fornita da Archimede.

Sia allora il segmento parabolico BHC (figura 4). Essendo H il vertice della parabola ed E il punto medio di BC, l'asse EH interseca il segmento CD, tangente alla parabola in C, nel suo punto medio K. Essendo poi BD parallela a EH e quindi perpendicolare a BC, per cui $BD = 2\,EK$, ed essendo $EH = HK$, l'area Q del triangolo BDC è quadrupla dell'area T del triangolo BHC. Di fatto:

$$Q = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{BD} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot 2\,\overline{EK} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot 4\,\overline{EH} = 4\cdot\frac{1}{2}\,\overline{BC}\cdot\overline{EH} = 4\,T\,.$$

A questo punto, riprendendo il risultato della proposizione 16, si ha:

$$3\,S = 4\,T \quad \text{da cui segue} \quad S = \frac{4}{3}T\,.$$

4. Archimede ha potuto dimostrare questa regola perché l'aveva scoperta con il suo *metodo meccanico*.

Tale scoperta è il contenuto della proposizione 1 nell'opera *Metodo*.

Proposizione 1 del *Metodo* [1, pag. 576].

Sia il segmento ABC compreso dalla retta AC e dalla parabola [4] *ABC, e si divida a metà la AC nel [punto] D, […] e si traccino le congiungenti AB, BC. Dico che il segmento [parabolico] ABC è [uguale ai] quattro terzi del triangolo ABC.*

Appunto, con le stesse denominazioni precedenti:

$$S = \frac{4}{3}T\,.$$

In articoli precedenti ho accennato fugacemente al *Metodo* seguito da Archimede per scoprire risultati che poi dimostra con il metodo di esaustione. In questa circostanza intendo soffermarmi su tale *Metodo*.

Descriverò dunque come Archimede ha scoperto la relazione in questione, ma lo farò adattando la sua esposizione al nostro linguaggio, anche simbolico.

È necessaria però una spiegazione, che chiarisca l'essenza del *Metodo*. La ricaviamo da un commento di Frajese, non prima di aver precisato che il *Metodo* presuppone di considerare una superficie piana come riempita da linee rette aventi una determinata direzione. Queste le considerazioni di Frajese [1, pag. 576]: «In ogni applicazione del *Metodo*, dovendosi valutare l'area […] di una figura geometrica, si tratta di trovare una seconda figura che possa vantaggiosamente essere paragonata alla prima. O per meglio dire: una seconda figura le cui rette componenti […] siano paragonabili alle corrispondenti rette […] della prima».

Vediamo allora come tutto ciò si adatti alla "dimostrazione" della proposizione precedente.

DIMOSTRAZIONE (della proposizione 1 del *Metodo*, mutuata da [1, pagine 577 e seguenti] ed esposta adattandola al nostro linguaggio, anche simbolico).

Sia dato dunque il segmento parabolico ABC, in cui AC è perpendicolare al suo asse DBE (figura 5). Si conducano dai punti A e C rispettivamente la retta AF parallela alla DE e la retta CF tangente alla parabola in C e si prolunghi CB fino a K e successivamente fino ad H, essendo $KH = CK$.

Si immagini che CH sia una leva con fulcro nel punto K, punto medio del segmento CH.

Sia ora O_iM_i una retta parallela alla DE, la quale intersechi l'arco di parabola ABC nel punto P_i . Sia quindi G_iT_i un segmento parallelo e uguale ad O_iP_i posto in H in modo che H sia il suo punto medio.

Si dimostra la seguente proporzione:

$$G_iT_i : O_iM_i = KN_i : KH\,,$$

[3] Vedi nota 1.

[4] Vedi nota 1.

o anche, essendo $G_iT_i = O_iP_i$:

(1) $$O_iP_i : O_iM_i = KN_i : KH\ ;$$

da cui segue:

$$O_iP_i \cdot KH = O_iM_i \cdot KN_i\ .$$

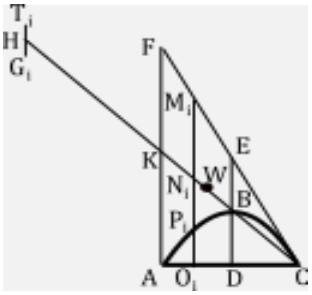

figura 5

Archimede, per la dimostrazione della proporzione (1) rimanda a risultati precedenti. Noi possiamo farlo con il supporto della Geometria Analitica.

Riferito allora il piano della parabola ABC (figura 5) ad un sistema di assi cartesiani aventi l'origine nel punto A, per asse x la retta AC e per asse y la retta AF, posto $C(b, 0)$ e $B(0, h)$, la parabola ha la seguente equazione:

$$y = -\frac{4\,h}{b^2}x^2 + \frac{4\,h}{b}x\ .$$

Calcoliamo il rapporto $\overline{O_\iota P_\iota}/\overline{O_\iota M_\iota}$.

Per questo, una volta posta uguale ad α l'ascissa di O_i, occorre conoscere l'equazione della tangente CF. Considerato che il coefficiente angolare di una generica tangente alla parabola è:

$$y' = -\frac{8\,h}{b^2}x + \frac{4\,h}{b}\,,$$

il coefficiente angolare della tangente che ci interessa, la quale passa per il punto C di ascissa b, è il seguente:

$$y'(b) = -\frac{8\,h}{b^2}b + \frac{4\,h}{b} = -\frac{4\,h}{b}\,.$$

Cosicché, la tangente CF, condotta per il punto $C(b,0)$, ha la seguente equazione:

$$y = -\frac{4\,h}{b}(x - b) \quad \text{o anche} \quad y = -\frac{4\,h}{b}x + 4\,h\,.$$

[Osserviamo per inciso che per $x=b/2$ si ha sulla retta CF: $y=2h$; ciò prova che B è il punto medio di DE.]

Considerato ora che sia P_i (sulla parabola) sia M_i (sulla tangente) hanno ascissa α, risulta:

$$\overline{O_\iota P_\iota} = y_{P_i} = -\frac{4\,h}{b^2}\alpha^2 + \frac{4\,h}{b}\alpha = \frac{4\,h\,\alpha}{b^2}(b - \alpha), \qquad \overline{O_\iota M_\iota} = y_{M_i} = -\frac{4\,h}{b}\alpha + 4\,h = \frac{4\,h}{b}(b - \alpha).$$

Dunque:

$$\frac{\overline{O_\iota P_\iota}}{\overline{O_\iota M_\iota}} = \frac{\frac{4\,h\,\alpha}{b^2}(b - \alpha)}{\frac{4\,h}{b}(b - \alpha)} = \frac{\alpha}{b} = \frac{\overline{AO_\iota}}{\overline{AC}}\,.$$

D'altro canto, in virtù del teorema di Talete, risulta:

$$\frac{\overline{AO_\iota}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{KN_\iota}}{\overline{KC}} \quad \text{ed essendo } KC=KH, \text{si ha:} \quad \frac{\overline{AO_\iota}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{KN_\iota}}{\overline{KH}}\,.$$

In definitiva, vale la (1).

Interpretando ora G_iT_i e O_iM_i come i pesi posti alle estremità di una leva, avente il fulcro in K e bracci rispettivamente KH e KN_i (si fa notare che N_i è il punto medio di O_iM_i), la relazione precedente ci dice che i pesi sono inversamente proporzionali ai rispettivi bracci e quindi, per una nota proprietà della leva di prima specie, la leva è in equilibrio.

E questo vale per ogni linea retta O_iM_i contenuta nel triangolo ACF. Cosicché, tutti i segmenti O_iM_i del triangolo ACF, paralleli ad AF, lasciati al loro posto, fanno da equilibrio ai segmenti corrispondenti O_iP_i del segmento parabolico, trasportati però in H come segmenti G_iT_i .

Tutti i segmenti O_iM_i del triangolo ACF possono essere trasportati a loro volta nel baricentro W del triangolo ACF e l'equilibrio permane.

Ora, è chiaro che la somma $\sum_i O_iM_i$ di tutti i segmenti O_iM_i ricopre il triangolo ACF, così come la somma $\sum_i O_iP_i$ di tutti i segmenti O_iP_i ricopre il segmento parabolico. Ossia, indicata con Q l'area del triangolo e con S quella del segmento parabolico, risulta: $\sum_i O_iM_i = Q$ e $\sum_i O_iP_i = S$.

Cosicché, tutto il triangolo ACF, trasportato in W, fa da equilibrio al segmento parabolico, trasportato in H. Per cui:

$$S \cdot KH = Q \cdot KW .$$

D'altro canto, ricordando che il baricentro di un triangolo divide ogni mediana in due parti di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra, si ha:

$$KW = \frac{1}{3}KC \text{ ossia, essendo } KC = KH, \quad KW = \frac{1}{3}KH .$$

Dunque:

$$S \cdot KH = Q \cdot \frac{1}{3} KH , \quad \text{cioè:} \quad S = \frac{1}{3} Q.$$

D'altra parte, siccome $AF = 2\,AK = 2\,DE = 2 \cdot 2\,DB = 4\,DB$, risulta

$$Q = \frac{1}{2} AC \cdot AF = 4 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DB = 4\,T ,$$

essendo T l'area del triangolo ABC. Dunque:

$$S = \frac{1}{3}Q = \frac{4}{3} T .$$

5. Il procedimento esposto nel precedente paragrafo 4 non era noto agli studiosi del Rinascimento poiché l'opera che lo contiene, il *Metodo*, era andata perduta e ritrovata solo nei primi anni del XX secolo.

Per scoprire, dunque, il risultato suddetto, senza il ricorso ad una riduzione all'assurdo insita nel metodo di Eudosso e che presupponeva già la conoscenza del risultato, quegli studiosi si videro costretti a inventare nuovi metodi.

- Uno di questi studiosi fu Bonaventura Cavalieri (1598-1647).

Nella sua *Geometria degli indivisibili*, libro quarto, egli enuncia e dimostra il seguente teorema 1 [3, pag. 419]: «*Se un parallelogramma, e un triangolo, sono sulla stessa base con un parabola, e attorno a un medesimo asse, o diametro, [allora] il parallelogramma sarà una volta e mezza a parabola, il triangolo invece sarà i tre quarti della parabola stessa* [5]».

La rappresentazione grafica, che fornisce lo stesso Cavalieri (figura 6), chiarisce l'enunciato.

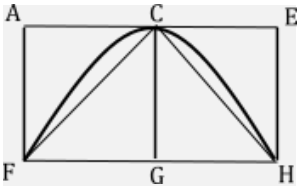

figura 6

Si desume allora che il rettangolo AEHF è una volta e mezza, cioè $3/2$, la parabola; la quale è dunque i $2/3$ del rettangolo, vale a dire che, indicata con S l'area del segmento parabolico, con $b=FH$ la sua base e con $h=CG$ la sua altezza, risulta:

[5] Come annota Frajese, per Cavalieri la "parabola" è "il semento parabolico". E, aggiungiamo noi, il parallelogramma è in realtà un rettangolo.

$$S = \frac{2}{3}\, b\, h\,.$$

Essendo poi il triangolo FCH la metà del rettangolo, risulta pure:

$$S = \frac{4}{3}\, b\, h\,.$$

- Un altro studioso che si occupò in maniera approfondita della quadratura della parabola fu il matematico e fisico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647).

Nella prima parte (*De dimensione parabolae*) dell'opera *De dimensione parabolae, solidique hyperbolici problemata duo*, per esempio, «Torricelli presentava ventun diverse dimostrazioni della quadratura della parabola, usando metodi equamente distribuiti tra il *metodo degli indivisibili* e il *metodo di esaustione* [6]. Una delle dimostrazioni basate sul metodo degli indivisibili è quasi identica alla quadratura meccanica effettuata da Archimede nel *Metodo*.» [2, pag. 412]

- Altri studiosi si occuparono dell'argomento e inventarono un metodo particolarmente brillante, con il quale non solo furono in grado di dimostrare ma anche di scoprire formule di aree di superfici piane (e volumi di solidi). Ne vedremo fra breve una applicazione proprio alla quadratura della parabola. Ma prima mi sembra doveroso precisare che questo metodo è spesso indicato come *metodo di esaustione*. Nulla da eccepire su questa denominazione se non si corresse il rischio concreto di confondere con il metodo di Eudosso.

Il metodo di Eudosso, com'è noto, ha valore solo dimostrativo, non euristico: una determinata formula può essere dimostrata solo se la si conosce; invece il metodo degli studiosi del Rinascimento ha anche valore euristico.

Insomma, lo si chiami come si vuole questo metodo rinascimentale, purché sia ben chiaro che è cosa diversa dal metodo di esaustione inventato da Eudosso di Cnido.

Un'altra precisazione su questo nuovo metodo: fu utilizzato ancor prima della creazione del Calcolo Integrale e utilizzò il concetto di limite di una successione, ma solo a livello intuitivo [7].

Vediamo allora come effettivamente il metodo di cui stiamo parlando permetta di scoprire formule di aree. Lo applichiamo precisamente all'area del segmento parabolico.

Riferiamo il piano di una parabola p ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) in modo che l'origine O coincida col vertice di p e l'asse y coincida con l'asse di simmetria della parabola e stabiliamo l'orientamento in modo che p sia situata nel semipiano $y \geq 0$ (figura 7).

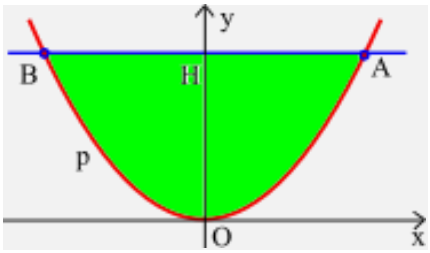

figura 7

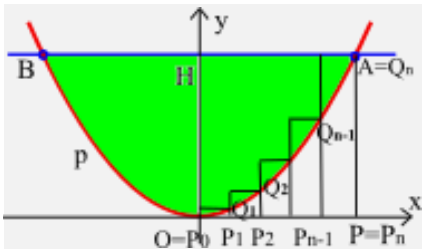

figura 8

L'equazione della parabola è allora del tipo $y = a\,x^2$, con $a>0$. Anzi, siccome per $x=\overline{AH}$ risulta $y=\overline{OH}$, si trova: $a = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{AH}^2}$.

Perciò la parabola ha equazione:

$$y = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}^2}\, x^2.$$

Ora, per evidenti ragioni di simmetria, l'area S del segmento parabolico è il doppio dell'area del triangolo

[6] Per la precisione, 11 dimostrazioni sono condotte con il *metodo di esaustione* e 10 con il *metodo degli indivisibili*.
[7] La definizione rigorosa di limite di una successione sarebbe venuta molto tempo dopo, nei primi anni dell'Ottocento, ad opera del matematico francese Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

mistilineo delimitato dall'arco VA di parabola e dai segmenti di retta VH ed AH. D'altronde l'area di questo triangolo mistilineo è uguale a quella del rettangolo VPAH diminuita dell'area S' del triangolo mistilineo delimitato dall'arco OA di parabola e dai segmenti di retta OP e PA. Di modo che risulta: $S=2\left(\overline{AH}\cdot\overline{OH}-S'\right)$. Non resta allora che calcolare S'. A questo proposito, indicata con P la proiezione ortogonale di A sull'asse x, suddividiamo il segmento OP (figura 8) in n parti uguali mediante i punti di divisione: $O=P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n=P$.

Chiamati $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}, Q_n$ i punti in cui le parallele all'asse y condotte ordinatamente per $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ intersecano la parabola, consideriamo quest'area:

$$S_n = \overline{P_0P_1}\cdot\overline{P_1Q_1} + \overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2Q_2} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}\cdot\overline{P_nQ_n}$$

vale a dire la somma di n rettangoli aventi basi di lunghezza uguale ad $\dfrac{\overline{AH}}{n}$ ed altezze nell'ordine:

$$\overline{P_1Q_1} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}^2}\cdot\overline{P_0P_1} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}^2}\left(\frac{\overline{AH}}{n}\right)^2 = \overline{OH}\cdot\frac{1^2}{n^2},$$

$$\overline{P_2Q_2} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}^2}\cdot\overline{P_0P_2} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}^2}\left(2\frac{\overline{AH}}{n}\right)^2 = \overline{OH}\cdot\frac{2^2}{n^2},$$

……;

$$\overline{P_nQ_n} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}^2}\cdot\overline{P_0P_n} = \frac{\overline{OH}}{\overline{AH}^2}\left(n\frac{\overline{AH}}{n}\right)^2 = \overline{OH}\cdot\frac{n^2}{n^2}.$$

Pertanto: $S_n = \dfrac{\overline{AH}}{n}\cdot\overline{OH}\left(\dfrac{1^2}{n^2}+\dfrac{2^2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^2}\right)$, ossia: $S_n = \overline{AH}\cdot\overline{OH}\left(\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}\right)$.

Il limite di S_n (quando $n\to\infty$) è l'area S'.

Siccome il limite dell'espressione in parentesi è $1/3$, risulta:

$$S' = \frac{1}{3}\,\overline{AH}\cdot\overline{OH}.$$

Di conseguenza:

$$S = 2\left(\overline{AH}\cdot\overline{OH}-\frac{1}{3}\overline{AH}\cdot\overline{OH}\right) = 2\cdot\frac{2}{3}\,\overline{AH}\cdot\overline{OH}.$$

E poiché $2\,\overline{AH} = \overline{AB} = b$, posto $\overline{OH} = h$, si ha:

$$S = \frac{2}{3}\,b\,h.$$

6. Fin qui abbiamo supposto sempre che la retta r che, intersecando la parabola determina il segmento parabolico, sia perpendicolare all'asse della parabola.

In realtà la regola, opportunamente adattata, vale anche quando la retta r è inclinata rispetto all'asse della parabola. La si trova utilizzando l'Analisi Matematica.

Vediamo allora qual è questa nuova regola.

Riferito il piano di una assegnata parabola p ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia O il vertice della parabola e sia y il suo asse di simmetria. Supponiamo inoltre che la parabola sia situata nel semipiano $y\geq 0$ (figura 9). Questo significa che la sua equazione è la seguente: $y = a\,x^2$, con $a>0$. Siano poi r una retta che intersechi la parabola nei punti A e B, t la tangente alla parabola parallela ad r, T il punto di contatto di t con p.

Si dimostra che l'area S del segmento parabolico compreso tra parabola p e la retta r è data dalla seguente formula:

$$S = \frac{2}{3}\,\overline{AB}\cdot\mathrm{dist}(T,r),$$

dove con $dist(T,r)$ *si è indicata la distanza di T da r.*

La regola, nel caso particolare in cui r sia perpendicolare all'asse della parabola, diventa evidentemente la regola di Archimede.

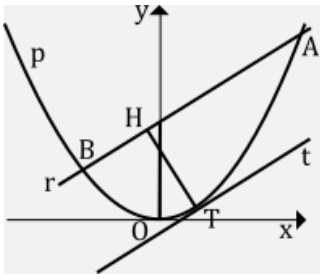

figura 9

DIMOSTRAZIONE.

Indicate con x_A, x_B ($x_A > x_B$) le ascisse dei punti A, B, si ha: $A(x_A, ax_A{}^2)$, $B(x_B, ax_B{}^2)$. Per cui, a conti fatti:

$$\overline{AB} = (x_A - x_B) \cdot \sqrt{1 + a^2(x_A + x_B)^2}\,.$$

A sua volta, la retta r=AB ha la seguente equazione:

$$y = a\,(x_A + x_B)\,x - a\,x_A\,x_B\,.$$

Consideriamo ora la retta t, tangente alla parabola e parallela alla retta r. Il suo coefficiente angolare m_t è naturalmente uguale a quello della retta r, ossia:

$$m_t = a\,(x_A + x_B)\,.$$

D'altro canto, essendo $y' = 2ax$ il coefficiente angolare di una generica tangente alla parabola, il punto T in cui t tocca p ha ascissa x_T tale che risulti:

$$2\,a\,x_T = a\,(x_A + x_B), \text{ vale a dire: } x_T = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

(Detto per inciso, come si può costatare, il punto T ha la stessa ascissa del punto medio del segmento AB.)

Di conseguenza l'ordinata di T è:

$$y_T = a\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2.$$

Perciò, ricordando la formula della distanza di un punto da una retta, e tenendo presente che l'equazione della retta r deve essere scritta in forma implicita, vale a dire:

$$a\,(x_A + x_B)\,x - y - a\,x_A\,x_B = 0\,,$$

risulta:

$$\mathrm{dist}(T, r) = \frac{|a(x_A + x_B) \cdot x_T - y_T - a\,x_A x_B|}{\sqrt{1 + a^2(x_A + x_B)^2}},$$

ossia, dopo aver sostituito e semplificato:

$$\mathrm{dist}(T, r) = \frac{\left|a(x_A + x_B) \cdot \frac{x_A + x_B}{2} - a\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - a x_A x_B\right|}{\sqrt{1 + a^2(x_A + x_B)^2}} = \frac{a\,(x_A - x_B)^2}{4 \cdot \sqrt{1 + a^2(x_A + x_B)^2}}.$$

Dunque:

$$\overline{AB} \cdot \mathrm{dist}(T, r) = \left[(x_A - x_B) \cdot \sqrt{1 + a^2(x_A + x_B)^2}\right] \cdot \left[\frac{a\,(x_A - x_B)^2}{4 \cdot \sqrt{1 + a^2(x_A + x_B)^2}}\right] = \frac{a}{4}\,(x_A - x_B)^3.$$

Calcoliamo adesso S l'area del segmento parabolico compreso fra la parabola p e la retta r. Si ha:

$$S = \int_{x_B}^{x_A} \{[a\,(x_A + x_B)\,x - a\,x_A\,x_B] - a\,x^2\}\,dx = \frac{a}{6}\,(x_A - x_B)^3.$$

Considerato che $(x_A - x_B)^3 = \frac{4}{a}\,\overline{AB} \cdot \mathrm{dist}(T, r)$, possiamo concludere che risulta:

$$S = \frac{a}{6} \cdot \frac{4}{a}\overline{AB} \cdot \mathrm{dist}(T, r) = \frac{2}{3}\,\overline{AB} \cdot \mathrm{dist}(T, r),$$

Come volevasi dimostrare.

A titolo di esempio, supponiamo che la parabola p abbia equazione $y = x^2$ e che i punti A e B abbiano ascisse rispettivamente 2 e – 1 (figura 10).

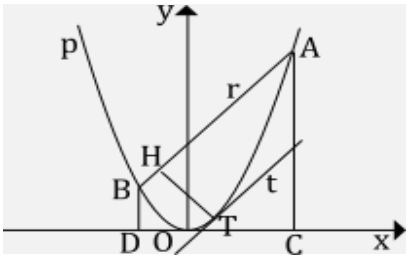

figura 10

L'area S del segmento parabolico compreso fra la parabola p e la retta AB può essere trovata sottraendo dal trapezio ABDC la regione sotto il grafico della funzione $y = x^2$, relativo all'intervallo $[-1, 2]$. Per cui, tenendo presente che $y_A = 4$ e $y_B = 1$, si ha:

$$S = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{DB}) \cdot \overline{DC} - \int_{x_B}^{x_A} x^2 \, dx = \frac{1}{2}(y_A + y_B)(x_A - x_B) - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 1)(2 + 1) - \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}.$$

Allo stesso risultato, a conferma della validità della formula trovata, si perviene applicando la formula medesima, ovviamente dopo aver calcolato $\overline{AB}$ e $\mathrm{dist}(T, r)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Archimede, *Opere* (di) a cura di Attilio Frajese, Torino, UTET, 1974.
[2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980.
[3] Bonaventura Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, Torino, UTET, 1966.
[4] Wikipedia, libera enciclopedia online.