Soluzione Problema 2

Sessione Suppletiva 2024

$$f_a(x) = \frac{x^2-1}{e^{ax}} \quad a \neq 0$$

a. $\forall a \in R$ le funzioni sono continue e derivabile nell'insieme dei numeri reali.

$$f_a(x) = 0 \; per \; x = -1 \;\; \vee \;\; x = 1$$

$$f_a(0) = -1$$

Quindi tutte le curve Γ_a passano per i punti:

$$(-1,0)\; ;\; (1,0)\; ;\; (0,-1)$$

Come si può verificare sostituendo le coordinate dei punti in:

$$y = \frac{x^2-1}{e^{ax}}$$

b. È sicuramente opportuno, al fine di semplificare i calcoli, dimostrare subito che le curve $\Gamma_a \; e \; \Gamma_{-a}$ sono simmetriche rispetto all'asse delle ordinate (prima parte del punto d).

Infatti:

$$f_a(-x) = \frac{x^2-1}{e^{-ax}} = f_{-a}(x)$$

Considero $a > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{e^{ax}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{e^{ax}} = +\infty$$

Derivata prima:

$$f_a'(x) = \frac{-ax^2+2x+a}{e^{ax}} > 0$$

Il denominatore è sempre maggiore di zero; per il numeratore:

la parabola ha concavità verso il basso, troviamo le sue eventuali intersezioni con l'asse delle ascisse:

$$a\,x^2 - 2x - a = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + a^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1+a^2}}{a} < 0$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1+a^2}}{a} > 0$$

Quindi la curva decresce per $x < x_1 \lor x > x_2$ e cresce per $x_1 < x < x_2$

x_1 punto di minimo relativo ed assoluto

x_2 punto di massimo relativo.

Derivata seconda:

$$f_a''(x) = \frac{a^2x^2 - 4\,ax + 2 - a^2}{e^{ax}} > 0$$

Il denominatore è sempre maggiore di zero; per il numeratore:

la parabola ha concavità verso l'alto, troviamo le sue eventuali intersezioni con l'asse delle ascisse:

$$a^2x^2 - 4\,ax + 2 - a^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = a^2\,(2 + a^2) > 0$$

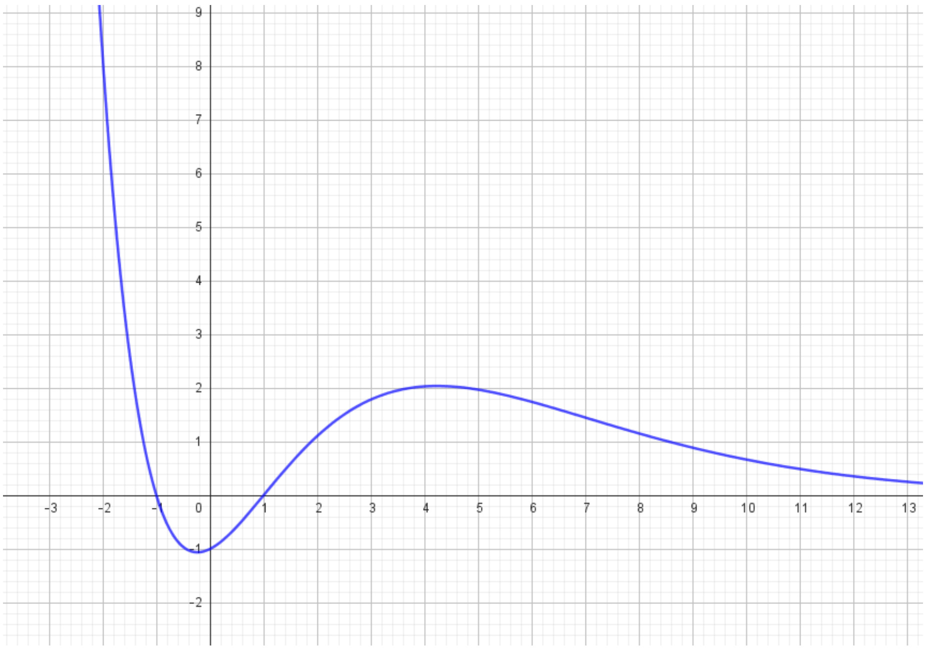
$$x'_1 = \frac{2 - \sqrt{2+a^2}}{a}$$

$$x'_2 = \frac{2 + \sqrt{2+a^2}}{a}$$

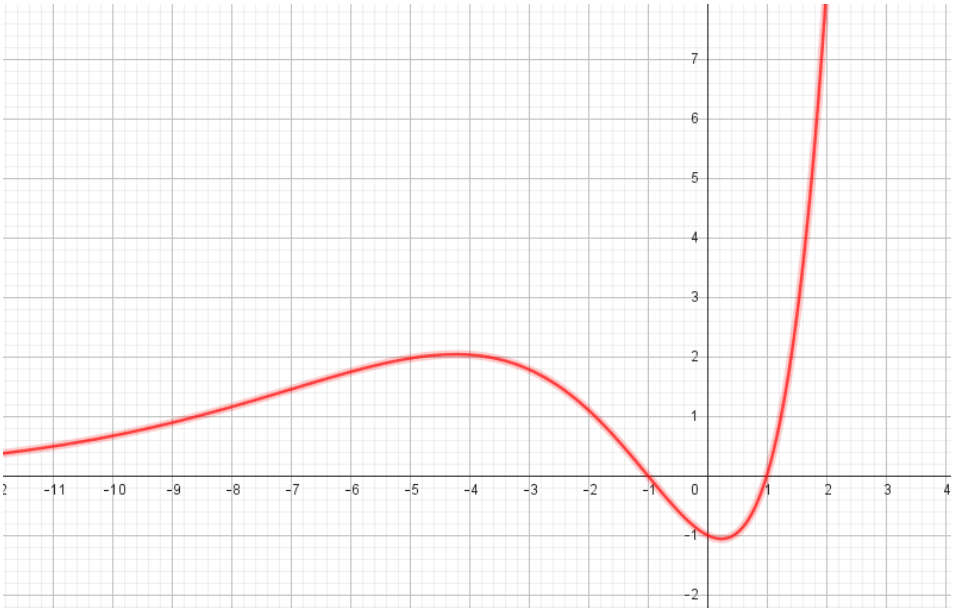
La curva presenta quindi due punti di flesso di ascissa x'_1 e x'_2

Rivolge la concavità verso l'alto per $x < x'_1 \lor x > x'_2$, verso il basso per $x'_1 < x < x'_2$.

Andamento della curva:



Per la simmetria evidenziata, nel caso in cui $a < 0$ l'andamento della curva sarà:



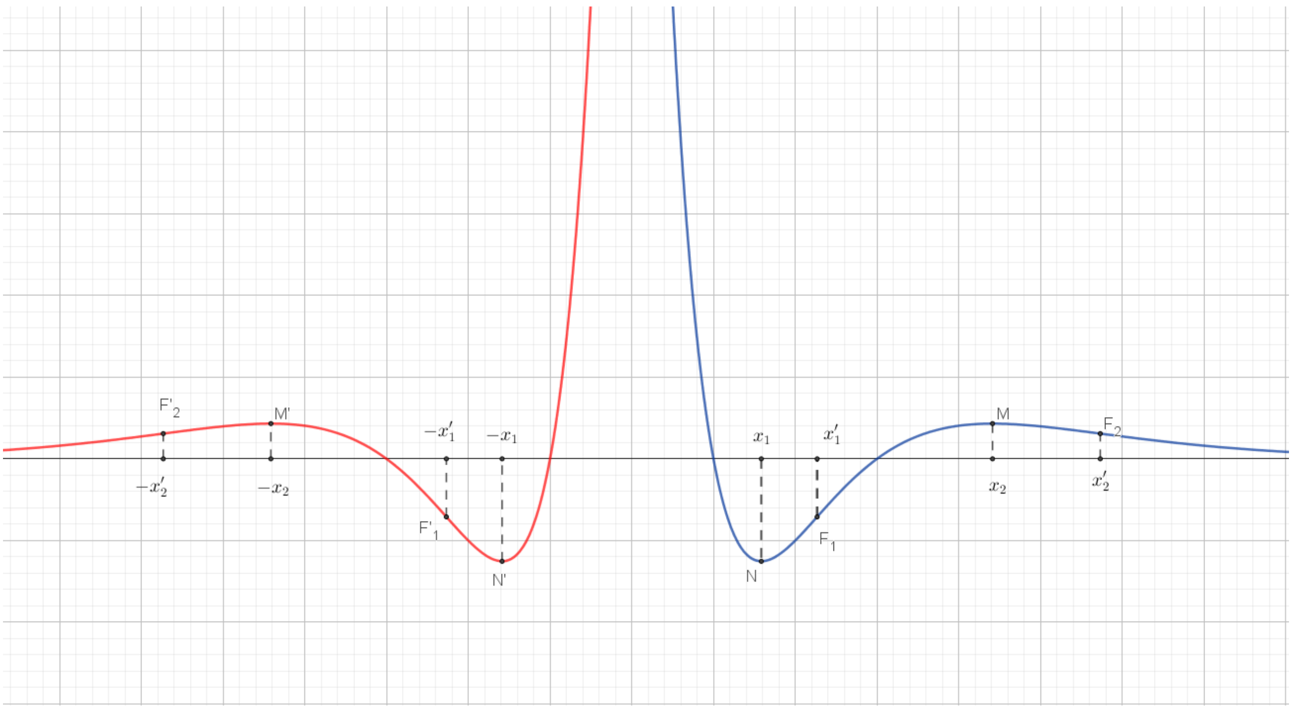
Quindi:

Quindi la curva cresce per $x < -x_2 \vee x > -x_1$ e decresce per $-x_2 < x < -x_1$

punto di massimo relativo: $-x_2$

punto di minimo relativo e assoluto: $-x_1$.

La curva presenta due punti di flesso di ascissa $-x'_2$ e $-x'_1$.



c. Deve essere $x'_1 = -x'_1 = 0$

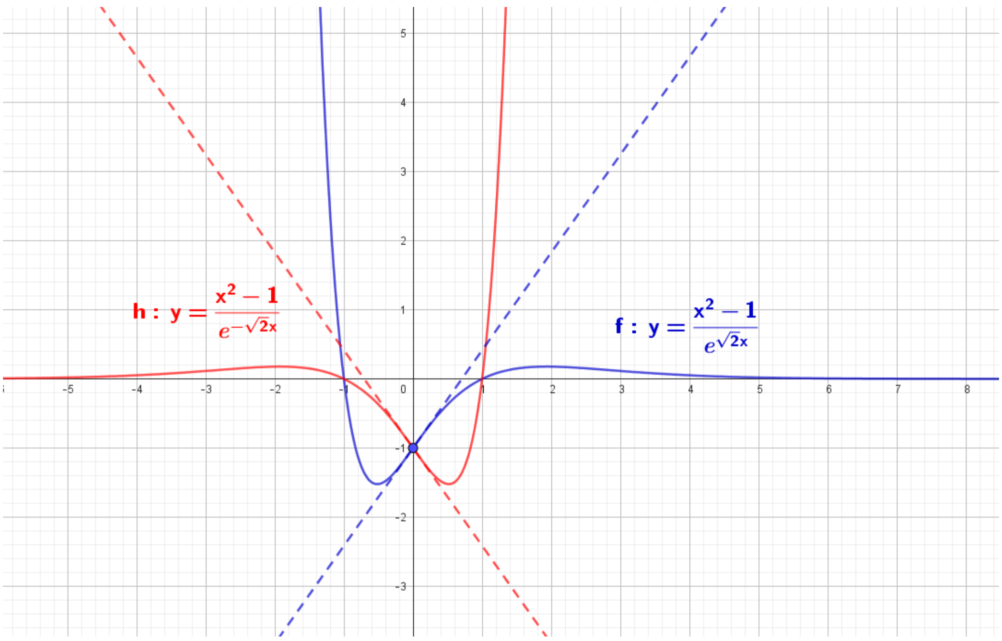
$$\frac{2 - \sqrt{2 + a^2}}{a} = 0$$

$$2 - \sqrt{2 + a^2} = 0 \rightarrow a = \mp\sqrt{2}$$

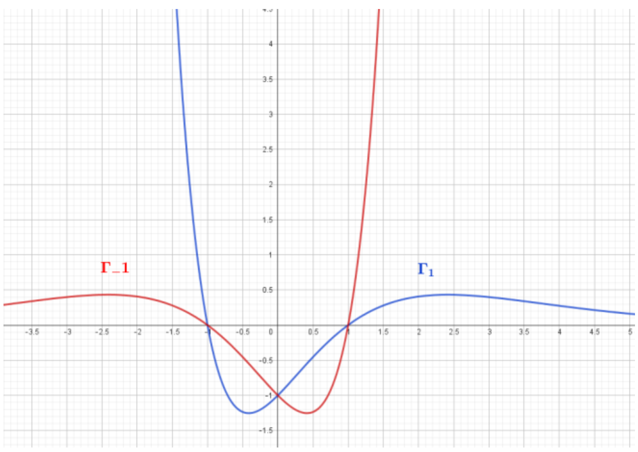
Per tali valori il punto di flesso è $F = (0, -1)$

Per $a = \sqrt{2}$ è $f'(0) = \sqrt{2}$ equazione retta tangente: $y = \sqrt{2}\,x - 1$

Per $a = -\sqrt{2}$ è $f'(0) = -\sqrt{2}$ equazione retta tangente: $y = -\sqrt{2}\,x - 1$



d. I grafici delle curve Γ_1 e Γ_{-1} sono:



L'area richiesta, per la simmetria, è:

$$2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x^2 - 1}{e^x} - \frac{x^2 - 1}{e^{-x}} \right) dx$$

Integrando due volte per parti si trova:

$$\int \frac{x^2 - 1}{e^x} = \int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} dx = -\frac{(x+1)^2}{e^x} + c_1$$

$$\int \frac{x^2 - 1}{e^{-x}} = \int (x^2 - 1) \cdot e^x dx = e^x \cdot (x-1)^2 + c_2$$

$$Area = 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x^2 - 1}{e^x} - \frac{x^2 - 1}{e^{-x}} \right) dx = 2\left(2 - \frac{4}{e}\right) \cong 1{,}06$$