

Misure degli ellissoidi

di Antonino Giambò

1. Gli ellissoidi vedono il loro battesimo con Archimede (287 circa - 212 a.C.), anche se lo scienziato siracusano li chiama “sferoidi”. Ne tratta per l'appunto in un'opera dal titolo *Conoidi e sferoidi* [1, pagg. 239 e segg.].

Archimede distingue due tipi di sferoide: lo *sferoide allungato* e lo *sferoide appiattito*, ottenuti dalla rotazione di un'ellisse rispettivamente intorno al suo asse maggiore o intorno al suo asse minore.

Ma diamo la parola ad Archimede [*lettera a Dositeo*, che fa da introduzione all'opera succitata]:

«Sulle figure sferoidali supponiamo le cose [seguenti]: se una sezione di cono acutangolo [cioè un'ellisse], rimanendo fermo il diametro maggiore compie un giro completo fino a tornare alla posizione di partenza, la figura compresa dall'ellisse si chiama *sferoide allungato*. Se, invece, restando fermo il diametro minore, l'ellisse compie un giro completo fino a tornare alla posizione di partenza, la figura compresa dall'ellisse si chiama *sferoide appiattito*».

Si tratta perciò di due *ellissoidi di rotazione*, che ai giorni nostri sono denominati rispettivamente: *sferoide prolato*⁽¹⁾ e *sferoide oblato*⁽²⁾.

Si capisce che, indicati con a , b , c i semiassi dell'ellissoide, con $a \geq b \geq c$, nello sferoide prolato risulta $a > b = c$ (figura 1), mentre nello sferoide oblato risulta $a = b > c$ (figura 2).

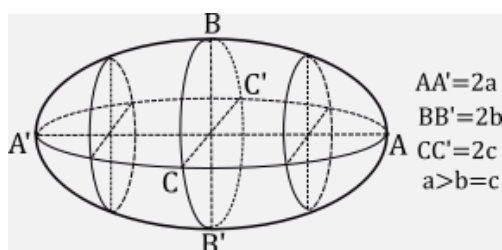


figura 1 – sferoide prolato

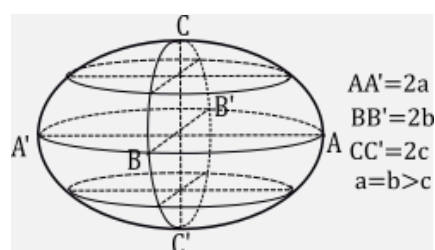


figura 2 – sferoide oblato

Esiste, tuttavia, un terzo tipo di ellissoide, che però non è un solido di rotazione, nel quale risulta $a > b > c$: è denominato *ellissoide scaleno*.

Archimede trova delle relazioni che permettono di giungere al volume di uno sferoide, vale a dire di un ellissoide di rotazione, ma non tratta dell'ellissoide scaleno, né trova relazioni atte a calcolare l'area della superficie di un ellissoide. Per questo bisogna aspettare una Matematica più evoluta.

In questo articolo farò un cenno al procedimento seguito da Archimede per calcolare il volume di uno sferoide, ed anche a quello seguito da Bonaventura Cavalieri, e descriverò il metodo che utilizza il calcolo integrale. Fornirò pure una dimostrazione della formula del volume di un qualunque ellissoide. Farò anche un breve cenno al modo in cui si può calcolare l'area della superficie di un ellissoide, benché con approssimazione, dato che non esistono formule chiuse per tale area.

2. Nella proposizione 27 dell'opera *Conoidi e sferoidi*, Archimede dimostra un teorema che, seppure implicitamente, fornisce una formula per il calcolo del volume di un ellissoide di rotazione.

Questo l'enunciato della proposizione [1, pag. 303]:

«Tagliata una qualunque figura sferoidale [cioè un ellissoide di rotazione] con un piano per il centro, perpendicolare all'asse, la metà dello sferoide è doppia del cono avente la stessa base del segmento e lo stesso asse».

¹ Il significato geometrico dell'aggettivo “prolato” è “di forma sferica allungata”. L'aggettivo deriva dal latino *prolatus*, participio passato del verbo *profero*, un significato del quale è appunto “prolungare”, “estendere”.

² L'aggettivo “oblato” deriva certamente dal latino *oblatus*, participio passato del verbo *offero*, tra i cui significati però non sembra esserci quello usato in geometria, cioè “di forma sferica schiacciata”.

Riguardo la dimostrazione, Archimede considera un cono Y avente la stessa base di mezzo sferoide, base che è il cerchio passante per il centro dello sferoide e perpendicolare all'asse di rotazione, e avente la stessa altezza di mezzo sferoide, cioè il semiasse attorno al quale avviene la rotazione. Considera quindi il cono X avente la stessa base di quello descritto e altezza doppia, per cui il volume di X è doppio di quello di Y.

Dopodiché, utilizzando *more solito* il metodo di esaustione, dimostra che mezzo sferoide non può essere né maggiore né minore di X. Deve essere quindi uguale ad X, ossia a 2Y.

Nel nostro linguaggio simbolico:

- se la rotazione avviene intorno all'asse maggiore, per cui $a > b = c$, indicato con V il volume dello sferoide (sferoide prolato o allungato), si ha:

$$\frac{1}{2}V = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi b^2 \cdot a \right) \text{ da cui segue la formula del volume dello sferoide prolato: } V = \frac{4}{3} \pi a b^2;$$

- se la rotazione avviene intorno all'asse minore, per cui $a = b > c$, indicato con V il volume dello sferoide (sferoide oblato o appiattito), si ha:

$$\frac{1}{2}V = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi a^2 \cdot c \right) \text{ da cui segue la formula del volume dello sferoide oblato: } V = \frac{4}{3} \pi a^2 c.$$

3. Dopo Archimede, per circa 18 secoli non si registrano novità riguardo il volume di uno sferoide. Bisogna arrivare infatti all'epoca del Rinascimento perché si verificassero evoluzioni interessanti in materia.

Per primo se ne occupò Bonaventura Cavalieri (1598-1647) nell'opera *Geometria degli indivisibili* [3].

Proponiamo un solo esempio: il calcolo del volume di uno sferoide prolato.

Si ottiene come conseguenza della proposizione XXXIV del libro III, corollario X, sezione III, che così recita:

«... solidi [mutuamente] simili qualunque generati da un circolo e da un'ellisse [...] secondo riferimenti dati, cioè sfera e sferoide [...] hanno tra di loro rapporto composto da quello dei loro assi ...».

Vale a dire, con riferimento alla figura sottostante (figura 3):

$$\frac{\text{Volume della sfera di raggio } r}{\text{Volume dello sferoide di semiasse } a > b = c} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{2r}{2a}.$$

Da qui, indicando con V il volume dello sferoide e tenendo presente che $r = b$, segue:

$$\frac{\frac{4}{3} \pi b^3}{V} = \frac{b}{a} \text{ e quindi } V = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

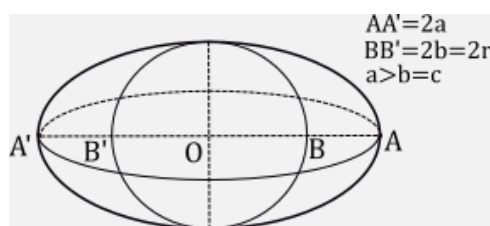


figura 3

4. Con la creazione del Calcolo Integrale le cose, per lo meno riguardo il volume, diventarono più semplici, oltre che più rigorose. Il volume di un ellissoide di rotazione si trova infatti facilmente, utilizzando appunto una formula idonea a calcolare il volume del solido generato, in una rotazione completa intorno all'asse x di un riferimento cartesiano, dalla regione piana sotto il grafico di una funzione continua $y=f(x)$ relativamente all'intervallo chiuso $[a, b]$. Volume che, com'è noto, è dato dalla formula seguente:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Se poi la rotazione avviene intorno all'asse y e la funzione $y=f(x)$ è invertibile nell'intervallo $[a, b]$ e la sua funzione inversa è $x=f^{-1}(y)$, allora, considerata la superficie delimitata dal grafico della funzione, dall'asse y

e dalle rette $y=f(a)$ ed $y=f(b)$, ammesso che tale superficie non attraversi l'asse y , il volume V del solido generato da essa in una rotazione completa intorno all'asse y è:

$$V = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(y))^2 dy.$$

Considerata allora l'ellisse di semiassi a, b , con $a > b$, assumiamo un riferimento cartesiano (Oxy) in modo che l'origine O coincida con il centro dell'ellisse, l'asse x contenga il semiasse maggiore e l'asse y il semiasse minore (figura 4).

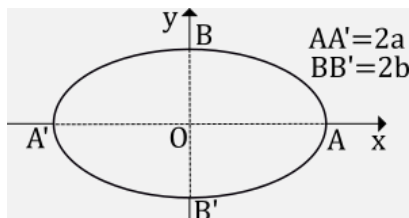


figura 4

L'ellisse ha pertanto la seguente equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

- Vogliamo calcolare il volume dello sferoide prolato, cioè dell'ellissoide ottenuto facendo ruotare di un giro completo intorno all'asse x la semi-ellisse contenuta nel semipiano $y \geq 0$.

Notiamo, per inciso, che i semiassi dello sferoide sono, in questo caso: a, b, c , con $a > b = c$.

Per il calcolo suddetto conviene porre l'attenzione sull'arco $\widehat{AB}$ di ellisse situato nel primo quadrante, la cui equazione, ricavata dalla precedente, è:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ con } 0 \leq x \leq a.$$

La regione piana sotto il grafico di questa funzione genera, in una rotazione completa intorno all'asse x , un solido che, per evidenti ragioni di simmetria è la metà di uno sferoide prolato, il cui volume è pertanto dato dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} V &= 2 \pi \int_0^a \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx = 2 \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \\ &= 2 \pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = 2 \pi \frac{b^2}{a^2} \left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

- Vogliamo invece calcolare il volume dello sferoide oblato, cioè dell'ellissoide ottenuto facendo ruotare di un giro completo intorno all'asse y la semi-ellisse contenuta nel semipiano $x \geq 0$.

Notiamo che i semiassi dello sferoide sono, in questo caso: a, b, c , con $a = c > b$.

Per il calcolo suddetto si pone l'attenzione sempre sull'arco $\widehat{AB}$ di ellisse situato nel primo quadrante, ma la cui equazione è ottenuta questa volta esprimendo x in funzione di y . Quindi:

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}, \text{ con } 0 \leq y \leq b.$$

La regione piana delimitata dal grafico di questa funzione e dagli assi cartesiani genera, in una rotazione completa intorno all'asse y , un solido che, per evidenti ragioni di simmetria è la metà di uno sferoide oblato, il cui volume è pertanto dato dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} V &= 2 \pi \int_0^b \left(\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \right)^2 dy = 2 \pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2) dy = \\ &= 2 \pi \frac{a^2}{b^2} \left[b^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^b = 2 \pi \frac{a^2}{b^2} \left[\left(b^3 - \frac{b^3}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} \pi a^2 b. \end{aligned}$$

5. Le formule utilizzate sopra non funzionano più per un ellissoide scaleno, giacché questo non è un solido di rotazione.

Ci soccorre, in questo caso, la geometria delle trasformazioni, in particolare l'affinità.

Ricordiamo, in via preventiva, l'equazione canonica di un ellissoide scaleno, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), e avente semiassi a, b, c tali che sia $a > b > c$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nello stesso spazio consideriamo la sfera avente centro nell'origine O del riferimento cartesiano e raggio r. La sua equazione è pertanto la seguente:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Consideriamo pure l'affinità di equazioni:

$$X = h x, \quad Y = k y, \quad Z = l z,$$

dove h, k, l sono parametri reali, che per comodità supponiamo positivi. Il modulo dell'affinità è il numero reale m tale che $m = h k l$. Ricavando x, y, z da queste equazioni, si ottiene:

$$x = \frac{X}{h}, \quad y = \frac{Y}{k}, \quad z = \frac{Z}{l}.$$

Sostituendo nell'equazione della sfera, questa risulta trasformata nell'ellissoide di equazione:

$$\left(\frac{X}{h}\right)^2 + \left(\frac{Y}{k}\right)^2 + \left(\frac{Z}{l}\right)^2 = r^2, \quad \text{ossia:} \quad \frac{X^2}{(h r)^2} + \frac{Y^2}{(k r)^2} + \frac{Z^2}{(l r)^2} = 1.$$

I suoi semiassi sono i valori $a = h r$, $b = k r$, $c = l r$.

Indicato ora con V il volume dell'ellissoide e con v quello della sfera, in virtù di una nota proprietà delle affinità, risulta:

$$\frac{V}{v} = m = h k l, \quad \text{pertanto:} \quad \frac{V}{v} = \frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{c}{r} = \frac{a b c}{r^3}.$$

Siccome $v = \frac{4}{3} \pi r^3$, allora si ha:

$$V = v \cdot \frac{a b c}{r^3} = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{a b c}{r^3} = \frac{4}{3} \pi a b c.$$

Da questa formula, che calcola il volume di un ellissoide scaleno, si ottengono naturalmente le formule particolari per i volumi della sfera, dello sferoide prolato e dello sferoide oblato. Precisamente

- Volume della sfera di raggio r: bisogna tener presente che $a=b=c=r$. Pertanto:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

- Volume dello sferoide prolato, di semiassi a, b, c tali che $a > b = c$:

$$V = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

- Volume dello sferoide oblato, di semiassi a, b, c tali che $a = c > b$:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

6. Il volume di un solido di rotazione, e in particolare di un ellissoide di rotazione, si può calcolare anche in base ad un teorema, che comunque utilizza il calcolo integrale, il cosiddetto teorema di Pappo-Guldino⁽³⁾.

Teorema 1 di Pappo-Guldino.

Considerata una superficie piana Σ delimitata da una curva chiusa, sia S la sua area. Facendo ruotare Σ di un angolo α , compreso fra 0 e 2π , intorno ad una retta t che non l'attraversi, è generato un solido, il cui volume V si ottiene moltiplicando l'area S per la lunghezza dell'arco di circonferenza generato dal baricentro G della superficie Σ nella rotazione intorno a t.

³ Pappo di Alessandria, III-IV secolo d.C.; Paolo Guldino, matematico svizzero, 1577-1643, fu uno dei critici più severi della *Geometria degli indivisibili* di Cavalieri.

In simboli, indicando con r la distanza di G da t :

$$V = \alpha r S.$$

In particolare, se la rotazione è di un giro completo, per cui $\alpha=2\pi$, la formula assume questa forma:

$$V = 2 \pi r S.$$

S'intende che il calcolo del volume V può essere effettuato se si conosce r , vale a dire la distanza del baricentro G della superficie Σ dall'asse di rotazione. Oltre, naturalmente all'area S .

Ora, nel caso particolare in cui la superficie Σ è il **trapezoide** di base $[a,b]$, relativo alla funzione $f(x)$, continua in $[a,b]$ e derivabile con derivata continua in $]a,b[$, indicata con S la sua area, le coordinate di G sono date dalle seguenti formule:

$$x_G = \frac{1}{S} \int_a^b x f(x) dx, \quad y_G = \frac{1}{2S} \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Per la cronaca, del baricentro (o centro di gravità) delle figure piane si era occupato Archimede, trattandone nell'opera *Sull'equilibrio dei piani* ovvero *Sui centri di gravità dei piani* [1, pagg. 387 e segg.] ed anche nei *Lemmi*, che fanno da premessa al *Metodo* [1, pagg. 574-575].

Dopo di lui, altri studiosi hanno sviluppato l'argomento e, fra di loro, in particolare Pappo e Guldino. Ma solo la nascita del calcolo integrale avrebbe permesso una trattazione completa e rigorosa.

Vediamo dunque come, utilizzando le formule suddette, si ottengano le formule dei volumi dello sferoide prolato e dello sferoide oblato.

- Ci occupiamo dapprima dello sferoide prolato, cioè dell'ellissoide ottenuto facendo ruotare di un giro completo intorno all'asse x la semi-ellisse contenuta nel semipiano $y \geq 0$. Ricordiamo che i semiassi dello sferoide sono, in questo caso: a, b, c , con $a > b = c$. Facciamo riferimento alla solita ellisse rappresentata in figura 3.

Poniamo l'attenzione sulla semi-ellisse $\widehat{AA'}$ situata nel semipiano $y \geq 0$, la cui equazione è pertanto la seguente:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{con } -a \leq x \leq a.$$

Conosciamo già l'area S sotto il grafico di questa funzione. Essa è precisamente la metà dell'area dell'ellisse, vale a dire: $S = \frac{1}{2} \pi a b$.

Bisogna trovare le coordinate del baricentro G di questa superficie. Per evidenti ragioni di simmetria, G deve trovarsi sull'asse y , per cui risulta $x_G = 0$. Si ha invece:

$$y_G = \frac{1}{2S} \int_{-a}^a \left(\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{\pi a b} \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = \frac{b}{\pi a^3} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{4}{3} \frac{b}{\pi}.$$

y_G è anche la distanza di G dall'asse di rotazione, che è l'asse x , per cui, in base al teorema di Pappo-Guldino, il volume V dello sferoide prolato è dato dalla seguente formula:

$$V = 2 \pi \cdot \frac{4b}{3\pi} \cdot \frac{\pi a b}{2}, \quad \text{da cui: } V = \frac{4}{3} \pi a b^2.$$

- Il procedimento per la determinazione della formula del volume dello sferoide oblato è analogo, pur con qualche ovvio cambiamento. In particolare, in questo caso, si considera la semi-ellisse situata nel semipiano $x \geq 0$, per cui l'arco di ellisse interessato è adesso quello che ha la seguente equazione:

$$x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}, \quad \text{con } -b \leq y \leq b.$$

I semiassi di questo sferoide sono a, b, c , con $a = c > b$.

Costatato che, per ovvie ragioni di simmetria, il baricentro G della semi-ellisse ha ordinata $y_G = 0$, la sua ascissa x_G si trova risolvendo il seguente integrale:

$$x_G = \frac{1}{2S} \int_{-b}^b \left(\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \right)^2 dy.$$

A conti fatti si trova:

$$x_G = \frac{4a}{3\pi},$$

e questa è anche la distanza di G dall'asse di rotazione, che adesso è l'asse y.

Si ha pertanto la seguente formula del volume V dello sferoide oblato:

$$V = 2\pi \cdot \frac{4a}{3\pi} \cdot \frac{\pi ab}{2}, \text{ da cui: } V = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

7. Per quanto riguarda l'area della superficie di un ellissoide le cose sono molto più complicate e dobbiamo accontentarci di una formula che fornisce un'approssimazione di tale area.

• La formula è quella dell'area di un ellissoide scaleno, ma ovviamente permette di calcolare, come casi particolari, anche le aree sia dello sferoide prolato sia dello sferoide oblato.

Sia allora un ellissoide, i cui semiassi siano a, b, c, con $a \geq b \geq c$. Ebbene l'area S della sua superficie è data, con approssimazione, dalla seguente formula:

$$S \approx 4\pi \left(\frac{(ab)^p + (ac)^p + (bc)^p}{3} \right)^{\frac{1}{p}},$$

dove p è una costante il cui valore è 1,6075.

Utilizzandola, si commette un errore di approssimazione non superiore a 1,061%.

Sia la formula sia la precisione sono state fornite nel 2004 dal danese Knud Thomsen. In effetti, la formula suddetta è conosciuta come *formula di Thomsen*.

Per esempio, prendendo l'ellissoide scaleno di semiassi a=6, b=5, c=4, si ottiene, naturalmente con l'aiuto di uno strumento di calcolo automatico (anche un semplice foglio elettronico):

$$S \approx 4\pi \left(\frac{(6 \times 5)^{1,6075} + (6 \times 4)^{1,6075} + (5 \times 4)^{1,6075}}{3} \right)^{\frac{1}{1,6075}} \approx 312,568.$$

Bisogna dire che poco prima lo stesso Thomsen aveva trovato la medesima formula, ma con $p = \log(3) / \log(2) \approx 1,5849$. Applicandola si commette un errore di approssimazione non maggiore dell'1,42%. È dunque una formula meno precisa dell'altra, che per questo la sostituì.

A dirla tutta, esistono anche specifiche formule di approssimazione delle superfici di uno sferoide prolato e di uno sferoide oblato, anche più semplici della suddetta, ma non ce ne occupiamo giacché la formula precedente le sostituisce egregiamente.

Per esempio, considerato l'ellissoide prolato di semiassi a=4, b=2, c=2, si trova:

$$S \approx 4\pi \left(\frac{(4 \times 2)^{1,6075} + (4 \times 2)^{1,6075} + (2 \times 2)^{1,6075}}{3} \right)^{\frac{1}{1,6075}} \approx 85,862.$$

Analogamente, per l'ellissoide oblato di semiassi a=5, b=5, c=3, si ha:

$$S \approx 4\pi \left(\frac{(5 \times 5)^{1,6075} + (5 \times 3)^{1,6075} + (5 \times 3)^{1,6075}}{3} \right)^{\frac{1}{1,6075}} \approx 234,891.$$

Riguardo poi la superficie sferica, qualunque valore di p, nella formula di Thomsen, va bene, poiché la formula stessa è un modo diverso, più complicato se si vuole, di scrivere la formula dell'area della superficie sferica.

Di fatto, se indichiamo con r il raggio di una sfera, essendo a=b=c=r, la formula di Thomsen fornisce il seguente valore dell'area S della superficie sferica:

$$S = 4\pi \left(\frac{(r^2)^p + (r^2)^p + (r^2)^p}{3} \right)^{\frac{1}{p}} = 4\pi \left(\frac{3(r^2)^p}{3} \right)^{\frac{1}{p}} = 4\pi r^2.$$

- Bisogna dire che anche per le superfici di rotazione esiste un teorema di Pappo-Guldino, che in teoria permetterebbe di calcolarne l'area.

Teorema 2 di Pappo-Guldino.

Considerata una curva piana γ limitata, sia L la sua lunghezza. Facendo ruotare γ di un angolo α , compreso fra 0 e 2π , intorno ad una retta t che non l'attraversi, è generata una superficie, la cui area S si ottiene moltiplicando la lunghezza L per la lunghezza dell'arco di circonferenza generato dal baricentro G della curva γ nella rotazione intorno a t .

In simboli, indicando con r la distanza di G da t :

$$S = \alpha r L.$$

In particolare, se la rotazione è di un giro completo, per cui $\alpha=2\pi$, la formula assume questa forma:

$$S = 2\pi r L.$$

In molti casi il calcolo per pervenire all'area della superficie è abbastanza semplice. Ma nel caso della superficie di uno sferoide, generato dalla rotazione di un'ellisse, il calcolo è estremamente complicato per la presenza di integrali ellittici. Integrali che, anche se risolti, possono dare solamente valori approssimati dell'area e non una formula chiusa, come quella del volume. D'altro canto, anche la lunghezza L non può essere ottenuta se non per approssimazione.

Tanto vale, allora, fermarsi qui e utilizzare la formula di approssimazione precedente.

8. COMPLEMENTI.

Archimede, nell'opera *Conoidi e Sferoidi*, descrive le intersezioni di uno sferoide qualunque con un qualsiasi piano perpendicolare o parallelo all'asse di rotazione.

Riporto le sue parole [1, proposizione 11, pag. 268]:

« [...] Se una [qualunque] delle figure sferoidali [= ellissoide, allungato o appiattito] viene tagliata da un piano per l'asse o parallelo all'asse, la sezione sarà una ellisse [...]. Se poi si taglia con un piano perpendicolare all'asse, la sezione sarà un cerchio [...] ».

Possiamo ritrovare tutto ciò trattando delle intersezioni di un ellissoide qualunque con un piano perpendicolare al suo asse maggiore (e quindi parallelo all'asse minore) o perpendicolare all'asse minore (e quindi parallelo all'asse maggiore).

Lo faremo però con il supporto della Geometria Analitica.

Allora, riferito lo spazio ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxyz), sia l'ellissoide di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dove a, b, c sono i suoi semiassi, con $a \geq b \geq c$. (figura 5).

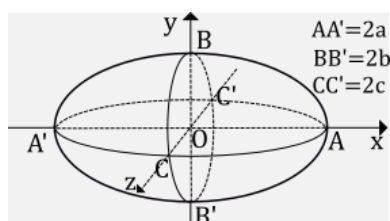


figura 5

- Intersecando l'ellissoide con un piano perpendicolare all'asse x , asse che contiene il suo semiasse maggiore, essendo $x=h$ (con $-a < h < a$) l'equazione di un tale piano, la curva sezione è rappresentata dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = h \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2} \end{cases} \quad \text{ossia:} \quad \begin{cases} x = h \\ \frac{y^2}{\frac{b^2(a^2 - h^2)}{a^2}} + \frac{z^2}{\frac{c^2(a^2 - h^2)}{a^2}} = 1. \end{cases}$$

Si capisce che, se $b > c$ questa curva è un'ellisse avente il centro sull'asse x e precisamente nel punto $(h, 0, 0)$ e semiassi:

$$\alpha = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - h^2}, \quad \beta = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - h^2}.$$

Se però è $b = c$ allora $\alpha = \beta$, per cui la curva sezione è il cerchio di equazioni:

$$\begin{cases} x = h \\ y^2 + z^2 = \alpha^2 \end{cases}$$

ovvero il cerchio avente il centro nel punto $(h, 0, 0)$ e raggio α .

In particolare, se il piano secante passa per il centro O dell'ellissoide, per cui $h = 0$, il cerchio sezione è il cerchio di centro O e raggio $b = c$.

In questo caso, essendo $a > b = c$, l'ellissoide è uno sferoide prolato.

- Intersecando l'ellissoide con un piano perpendicolare all'asse z , asse che contiene il suo semiasse minore, essendo $z = k$ (con $-c < k < c$) l'equazione di un tale piano, la curva sezione è rappresentata dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \end{cases} \quad \text{ossia:} \quad \begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{\frac{a^2(c^2 - k^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2 - k^2)}{c^2}} = 1. \end{cases}$$

Si capisce che, se $a > b$ questa curva è un'ellisse avente il centro sull'asse z e precisamente nel punto $(0, 0, k)$ e semiassi:

$$\gamma = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - k^2}, \quad \delta = \frac{b}{c} \sqrt{c^2 - k^2}.$$

Se però è $a = b$ allora $\gamma = \delta$, per cui la curva sezione è il cerchio di equazioni:

$$\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = \gamma^2 \end{cases}$$

ovvero il cerchio avente il centro nel punto $(0, 0, k)$ e raggio γ .

In particolare, se il piano secante passa per il centro O dell'ellissoide, per cui $k = 0$, il cerchio sezione è il cerchio di centro O e raggio $a = b$.

In questo caso, essendo $a = b > c$, l'ellissoide è uno sferoide oblato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Archimede, *Opere* (di) a cura di Attilio Frajese, Torino, UTET, 1974.
- [2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980.
- [2] Bonaventura Cavalieri, *Geometria degli indivisibili*, a cura di Lucio Lombardo-Radice, Torino, UTET, 1966.
- [4] Wikipedia, libera enciclopedia online.