

Quesito 4

Sessione suppletiva esame stato 2024

4. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{ax-7}{x^2}\right)$, con a parametro reale positivo. Successivamente, individuare il valore di a in corrispondenza del quale risultano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[1; 7]$ e le coordinate del punto che ne verifica la tesi.

Dominio:

$$f(x) = \ln\left(\frac{ax-7}{x^2}\right), a > 0$$

$$\frac{ax-7}{x^2} > 0 \rightarrow x > \frac{7}{a}$$

La funzione è continua e derivabile nel dominio.

Affinché siano soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle deve essere:

$$f(1) = f(7)$$

$$a-7 = \frac{7a-7}{49} \rightarrow a = 8$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{8x-7}{x^2}\right)$$

Dominio

$$D: x > \frac{7}{8}$$

La funzione è continua e derivabile nel dominio, quindi continua in $[1; 7]$, derivabile in $(1; 7)$ e

$f(1) = f(7)$, quindi la funzione soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in $[1; 7]$.

Per il Teorema di Rolle esiste almeno un

$$c \in (1; 7) | f'(c) = 0$$

$$f'(x) = \frac{14-8x}{x^2(8x-7)}$$

$$\frac{14-8x}{x^2(8x-7)} = 0 \rightarrow x = \frac{7}{4} \rightarrow c = \frac{7}{4} \in (1; 7)$$