Quesito 6

Prova suppletiva esame di Stato 2024

6. In un sistema di assi cartesiani Oxy, si consideri l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, con k parametro reale non nullo. Sia t la retta tangente all'iperbole in un suo punto P. Detti A e B i punti in cui t interseca gli assi del riferimento, dimostrare che i triangoli APO e BPO sono equivalenti e che la loro area non dipende dalla scelta di P.

Sia

$$P = \left(a, \frac{k}{a}\right); \; a \neq 0$$

un punto generico dell'iperbole.

Indico con

$$f(x) = \frac{k}{x} \; ; \; x \neq 0$$

L'equazione della retta tangente all'iperbole nel suo generico punto $P = \left(a, \frac{k}{a}\right)$ è:

$$y - \frac{k}{a} = f'(a)(x - a)$$

$$f'(x) = -\frac{k}{x^2} \rightarrow f'(a) = -\frac{k}{a^2}$$

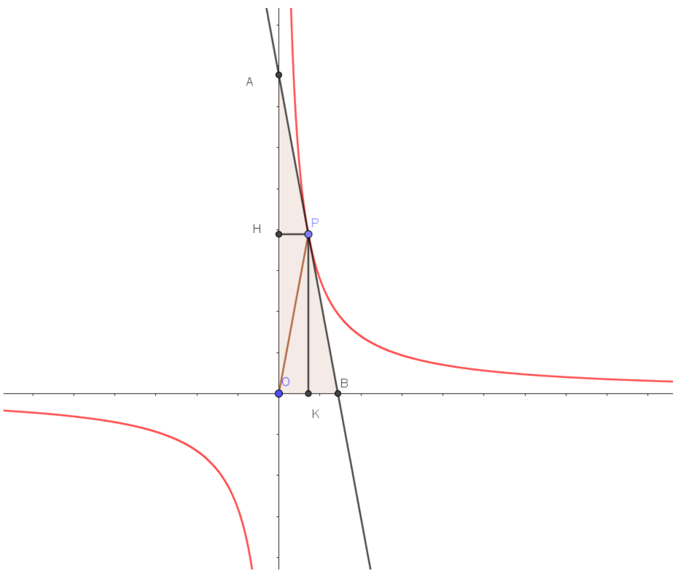
$$t: y - \frac{k}{a} = -\frac{k}{a^2}(x - a)$$

Intersezione della retta tangente con l'asse delle ordinate:

$$A\left(0, \frac{2k}{a}\right)$$

Intersezione della retta tangente con l'asse delle ascisse:

$$B(2a, 0)$$



$OA = \left|\frac{2k}{a}\right| \quad OB = |2a| \quad PH = |a| \quad PK = \left|\frac{k}{a}\right|$

Quindi:

$$A(OPA) = \frac{1}{2} OA \cdot PH = |k|$$

$$A(OPB) = \frac{1}{2} OB \cdot PK = |k|$$