Il triangolo aritmetico

I coefficienti binomiali trovano una efficace disposizione geometrica nel noto triangolo di Tartaglia (o di Pascal o di Stifel).

Le diverse denominazioni non vanno attribuite a rivendicazioni di stampo nazionalistico tra Italia , Francia e Germania ma piuttosto ai tre principali trattati che introdussero il triangolo aritmetico nel mondo occidentale e ne illustrarono le proprietà e le principali applicazioni .

In realtà una configurazione numerica del “Triangolo di Tartaglia” compare già in un testo cinese del 1303 “*Prezioso Specchio dei Quattro Elementi” di* Chu Shih-Chieh..

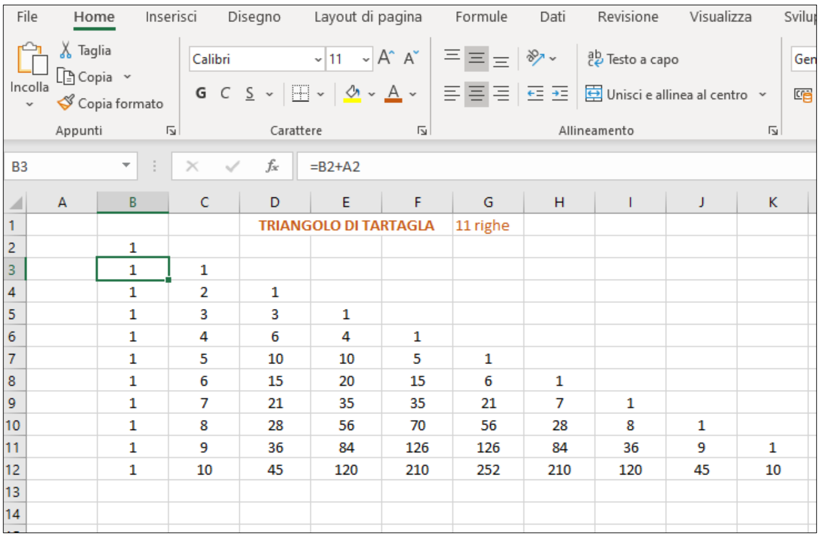
Altre citazioni si riscontrano in opere più antiche di matematici di cultura araba o indiana. Questo fa riflettere come alcuni oggetti matematici, idonei a risolvere semplici ma fondamentali problemi di conteggio, nascono spontaneamente in contesti diversi.

Al “*General trattato di numeri et misure* “(1566) di Tartaglia va il merito della divulgazione attraverso le invenzioni dell’arte tipografica, mentre “*Traité du triangle arithmétique”*(1654) di Pascal si distingue per gli sviluppi del Calcolo combinatorio e per le applicazioni al Calcolo delle Probabilità.

Degna di nota nel trattato *di* Stifel “ *L’ Arithmetica integra”* (1544) , è la formula che porta il suo nome .

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dalla quale deriva un algoritmo iterativo, di sicura valenza didattica, che permette la costruzione delle righe del triangolo .



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1				TRIANGOLO DI TARTAGLIA			11 righe				
2		1									
3		1	1								
4		1	2	1							
5		1	3	3	1						
6		1	4	6	4	1					
7		1	5	10	10	5	1				
8		1	6	15	20	15	6	1			
9		1	7	21	35	35	21	7	1		
10		1	8	28	56	70	56	28	8	1	
11		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
12		1	10	45	120	210	252	210	120	45	10
13											
14											

Sulla dimostrazione della formula di Stifel verte il **quesito 8** della prova di matematica della **Sessione straordinaria del 2005.**

Una dimostrazione alternativa a quella riportata solitamente dai libri di testo, si ottiene sfruttando il suo significato combinatorio.

Supponiamo di avere un insieme di cardinalità $n-1$ e di aver costruito i suoi sottoinsiemi di cardinalità k, i quali sono in numero di $\binom{n-1}{k}$.
Se aggiungiamo un ulteriore elemento x otteniamo un insieme A_1di cardinalità n del quale si vogliono costruire i sottoinsiemi di cardinalità k .

I sottoinsiemi di A di cardinalità k, precedentemente determinati, sono ovviamente sottoinsiemi anche di A_1. Diremo che costituiscono la famiglia F dei sottoinsiemi di A_1 , di cardinalità k, che non contengono l'elemento x . **Il loro numero è** $\boldsymbol{\binom{n-1}{k}}$
Consideriamo ora un'altra famiglia G di sottoinsiemi , ottenuti aggiungendo il nuovo elemento x ai $\boldsymbol{\binom{n-1}{k-1}}$sottoinsiemi di A di cardinalità $k-1$. G è la famiglia dei sottoinsiemi di A_1 , di cardinalità k, che contengono l'elemento x .**Il loro numero è** $\boldsymbol{\binom{n-1}{k-1}}$**.**

Poichè le suddette famiglie sono disgiunte e tra loro complementari , la loro unione coincide con la totalità delle $k-parti$ di A , il cui numero complessivo è, pertanto , uguale a $\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$-

Resta quindi verificata la relazione

$$\boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}$$