LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Supponiamo di effettuare **n** prove, in condizioni identiche, di un esperimento con **due soli esiti** possibili.
Sia S l'evento associato ad uno dei due esiti e $\overline{S}$ l'evento contrario.
Siano p e $q = 1 - p$ le rispettive probabilità.

All'evento S si associa la variabile aleatoria X = (0,1,2,3…., n) che rappresenta il numero di volte che (sulle n prove) si verifica S.

In parole povere, se indichiamo con <<successo>> il verificarsi dell'evento S, la Binomiale, di parametri n e k, permette di calcolare la probabilità di k successi in n prove (con $0 \leq k \leq n$) .

FORMULA della BINOMIALE

$P(X = k) = C_{n,k} p^k q^{n-k}$
dove $C_{n,k}$ rappresenta il numero delle combinazioni semplici di n elementi , di classe k.

Giustificazione della formula
Effettuate n prove , i possibili risultati possono essere rappresentati da sequenze di n simboli S e $\bar{S}$
Osserviamo che una sequenza <<favorevole>> all' evento: "S si è realizzato k volte", ovvero una sequenza del tipo

$$SSS \dots . S_{\ k\ volte}\ \bar{S}\bar{S} \dots \bar{S}_{n-k\ \ volte}$$

ha probabilità $p^k \cdot q^{n-k}$. corrispondente al prodotto delle probabilità di ciascun evento (***probabilità composta-eventi indipendenti***)

Il conteggio tutte le possibili sequenze di questo tipo, supponendo di cambiare di posto i simboli , può essere effettuato in due modi diversi, le stesse con cui si perviene allo sviluppo della potenza $n - sima$ del binomio.

a) contando le permutazioni di n oggetti con k elementi uguali a S e $n - k$ elementi uguali a $\bar{S}$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_{n,k}$$

b) contando in quanti modi si possono scegliere k posti , nella sequenza, da destinare al simbolo S (ovvero $n - k$ posti al simbolo $\bar{S}$)

Poiché le Cn, k sequenze costituiscono eventi tra loro **incompatibili,**
la probabilità totale che *S* si verifichi *k* volte (k successi) in n prove è

$$\boldsymbol{C_{n,k}\ p^k\ q^{n-k}}$$

La formula richiama in modo evidente quella del generico termine dello sviluppo della potenza $n - sima$ del binomio di Newton, dove al prodotto dei singoli monomi si sostituisce il prodotto delle probabilità.

In entrambi i casi si ha che fare con sequenze di scelte dicotomiche

OSSERVAZIONE

Se nella formula di Newton si assegna il valore 1 a ciascuna delle variabili, a e b, si trova l'identità

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n,k} = 2^n$$

che assume anche un interessante significato combinatorio

La somma al primo membro rappresenta il numero totale dei monomi che si ottengono moltiplicando tra di loro gli n fattori uguali a $(a + b)$, prima che i termini simili siano sommati tra di loro.

In generale rappresenta il numero di tutti i sottoinsiemi di uno stesso insieme di cardinalità n.

Il valore 2^n è il numero delle disposizioni con ripetizione $D^r_{2,k}$ovvero il numero delle sequenze di lunghezza k dei due simboli : nello sviluppo della potenza di un binomio le due lettere a e b, nella distribuzione binomiale gli eventi $S\ e\ \overline{S}$

L'identità si spiega osservando che la costruzione di un sottoinsieme di un dato insieme A di cardinalità n, si riduce ad una **scelta dicotomica:**

Si può, infatti, procedere nel modo seguente

si considera ciascun elemento e si dichiara<< Sì >> o $\ll No \gg$, a seconda che debba far parte o no del sottoinsieme (si può sempre decidere lanciando una moneta!).L'insieme delle parti di un insieme di cardinalità n, risulta così in corrispondenza biunivoca col numero di sequenze di lunghezza n, del tipo

Sì Sì No No No …… Sì Sì

o , se vogliamo,

$$T \quad T \quad C \quad C \quad C \quad \ldots\ldots \quad T \quad T$$

che sono appunto 2^n