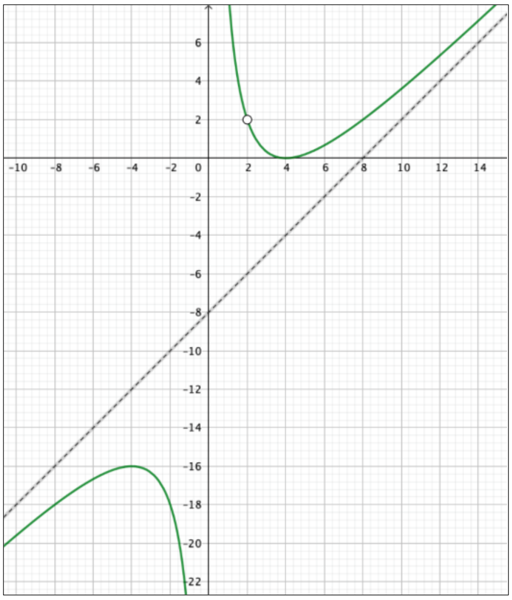
**PROBLEMA 1**

*Si consideri il grafico γ in figura, rappresentativo di una funzione* $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$, *dove* $A(x)$ *e* $B(x)$ *sono dei polinomi, definita nel dominio* $D=(-\infty;\ 0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$.




*a) Analizzando il grafico, si deducano lo zero, l'insieme immagine e gli estremi relativi di f. Determinare i valori dei limiti agli estremi del dominio e i valori di* $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ *e* $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)$. *Scrivere le equazioni degli asintoti di f.*

*b) Supponendo che la funzione f abbia equazione* $y=\frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$ *determinare i valori dei parametri a, b, c, d.*

*c) Dal grafico γ, dedurre i grafici delle funzioni* $f(|x|)$ *e* $\ln(f(x))$ *specificando, per ciascuna, dominio, asintoti, estremi e insieme immagine.*

*d) Si consideri la funzione* $F(x)=\int_3^x f(t)dt$, *definita nell'intervallo [3;8]. Tracciare un suo grafico rappresentativo Γ, specificando l'ascissa del punto di flesso e il coefficiente angolare della retta tangente in tale punto.*

## Soluzione

**a)** Il grafico in figura suggerisce che la funzione $f(x)=\frac{A(x)}{B(x)}$ si estende all'infinito, **avvicinandosi asintoticamente alle rette**
**x=0** ***e*** $\boldsymbol{y=x-8}$

**L' Insieme Immagine** è **I=(−∞; -16]∪[0;+∞).**

**Valori dei limiti agli estremi del dominio**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^+} f(x) = 2$$

La funzione è prolungabile in modo continuo nel punto (2,2)

Per la definizione di asintoto obliquo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = -8$$

**Estremi relativi e zeri** Dal grafico si evince che il punto di coordinate **(4,0)** è l'unico **zero** di $f(x)$ ed è anche un estremo relativo in cui la tangente coincide con l'asse $x$.

Si tratta di un punto di **minimo relativo** in quanto il grafico è decrescente nell'intorno sinistro e crescente nell'intorno destro.

L'altro estremo relativo è il punto **(-4, -16)** che è invece un punto di **massimo** in quanto il grafico è crescente nell'intorno sinistro e decrescente nell'intorno destro.

**b)** Sia $y=\frac{a(x-b)^2(x-c)}{x(x-d)}$ l'equazione di $f$.

Una funzione algebrica razionale fratta $f(x)=\frac{\mathrm{A(x)}}{\mathrm{B(x)}}$, quoziente di due polinomi, è definita nell'insieme dei numeri reali privato degli eventuali zeri del denominatore.
Poiché il dominio è $D=(-\infty; 0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$, si deduce $B(0) = B(2) = 0$, pertanto, **d=2**

Poiché la funzione è prolungabile in modo continuo nel punto (2,2) deve essere anche $A(2) = 0$
Il valore $x = 4$ è soluzione doppia dell'equazione $A(x) = 0$
Pertanto, $\boldsymbol{b = 4}$ , $\boldsymbol{c = 2}$

Imponendo il passaggio per il punto $(-4, -16)$ si determina il valore del parametro $a$

$$-16= \frac{a(-8)^2(-4-2)}{-4(-4-2)} = \frac{64\,a}{-4}= -16\,a \rightarrow a = 1$$

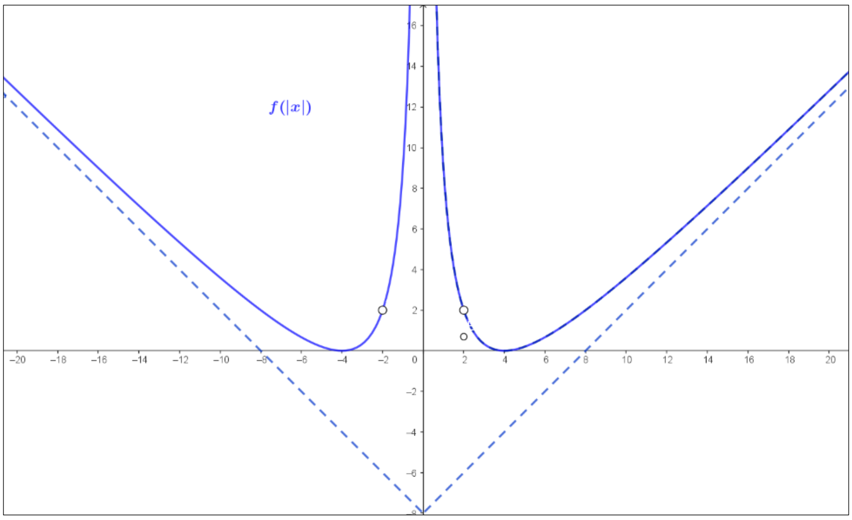
L'equazione di $f$ assume la forma $y = \frac{(x-4)^2(x-2)}{x(x-2)}$ ovvero $y = \frac{(x-4)^2}{x} \cap x \neq 2$

**c)** La funzione $f(|x|)$ è una funzione composta $f(g(x))$ essendo $g(x)=|x|$

La funzione $g(x)$ ha per dominio $R$ e insieme immagine $R_0^+$, dal quale vanno esclusi i valori $x = 0 \cap x = 2$ affinché la legge di composizione abbia senso.

Il grafico è l'unione della porzione di $\gamma$ appartenente al primo quadrante e dalla sua simmetrica rispetto all'asse y.

Alla stessa simmetria sono soggetti gli asintoti *(* $x = 0$ *è retta unita*)




$D$=$(-\infty$; -2)∪(-2;0) ∪(0;2)∪(2;+∞) I =[0;+∞).

Asintoti $x=0$ $y=x-8$ $y=-x-8$

**Estremi (punti di minimo relativo e assoluto): (-4,0) e (4,0)**

La funzione $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\ln(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ è definita per i valori di $x$ tali che $f(x)>0$, cioè

D= (0;2)∪(2;4)∪ $(4,+\infty)$

L'insieme immagine è I =(-∞;+∞)

**Asintoti verticali : x=0 (destro) x=4**

In quanto

$$\lim_{x\to0^+} \mathrm{f(x)} = +\infty \;\rightarrow \lim_{x\to0^+} \ln(\mathrm{f(x)}) = +\infty$$

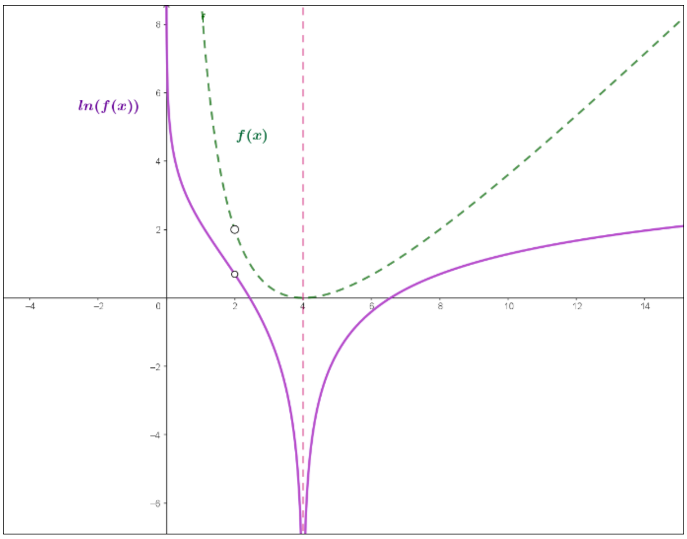
$$\lim_{x\to4} f(x)=0 \;\rightarrow \lim_{x\to4} \ln(f(x)) = -\infty$$

**Non esistono asintoti obliqui**

In quanto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(f(x))=+\infty$$

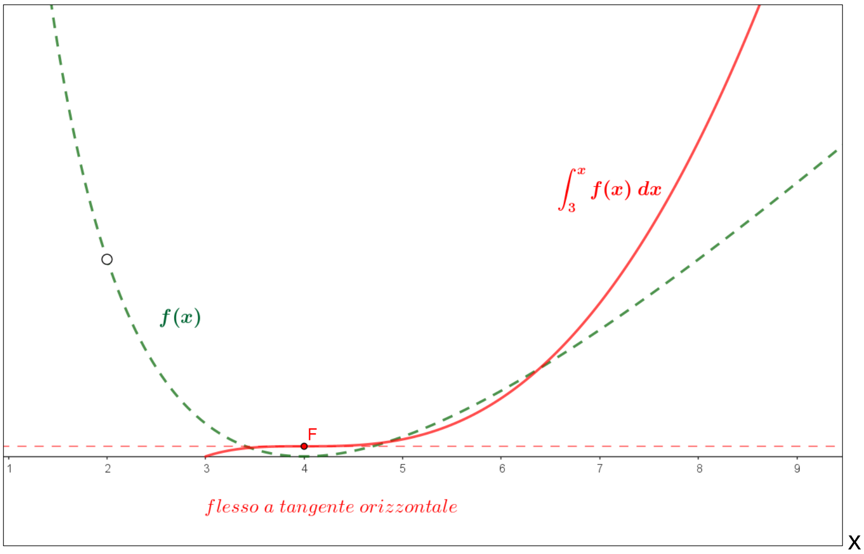



**ma** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(f(x))}{x}=0$ poiché

essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=1$, $\ln(f(x))$ è *un infinito di ordine inferiore a* $x$

**Monotonia** :$G'(x)=\frac{f\prime(x)}{f(x)}$ → essendo $f(x)>0$ nel dominio di $G(x)$,la monotonia della funzione logaritmica è la stessa del suo argomento .

***d)*** $F(x)=\int_3^x f(t)dt \rightarrow F'(x) = f(x)$ per il Teorema fondamentale del calcolo integrale essendo $f(x)$ continua nell'intervallo [3,8].
$F(3) = 0$




La monotonia e la concavità di $F(x)$ si evincono dal segno e dalla monotonia di $f(x)$

| | 3 | 4 8 |
|---|---|---|
| $F'(x) = f(x)$ | Positiva decrescente | Positiva crescente |
| $F''(x) = f'(x)$ | Negativa | Positiva |
| $F(x)$ | Crescente concava | Crescente convessa |

Il flesso cade nel punto di ascissa 4 e il coefficiente angolare della relativa tangente è $f(4) = 0$

**Anche se non richiesta, si può determinare l'equazione di F**

$F(x) = \int_3^x \frac{(t-4)^2}{t} dt$ se $x \in [3,8]$

$$\int \frac{(x-4)^2}{x} dx = \int \left(x - 8 + \frac{16}{x}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 - 8x + 16\ln|x| + c$$

$F(x) = =\left[16\ln t + \frac{1}{2}t^2 - 8t\right]_3^x = 16\ln\frac{x}{3} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2} - 8x + 24 = \mathbf{16\ln\frac{x}{3} + \frac{1}{2}x^2 - 8x + \frac{39}{2}}$

$F(4) = 16\ln\frac{4}{3} - \frac{9}{2}$

**Flesso$\left(4, 16\ln\frac{4}{3} - \frac{9}{2}\right)$ tangente inflessionale $y = 16\ln\frac{4}{3} - \frac{9}{2}$**