PROBLEMA 1 – Straordinaria 2024

Sia data la seguente funzione parametrica: $y = x^3 + ax^2 + c$.

- Si dimostri che per ogni valore dei parametri reali a e c ($a \neq 0$), il flesso coincide con il punto medio del segmento che ha per estremi i punti di massimo e di minimo relativi.
- Si determinino i valori dei parametri affinché la funzione abbia il massimo in $x = -2$ e abbia un flesso di ordinata 6.
- Si disegni quindi il grafico della funzione $f(x)=x^3+3x^2+4$, e si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la funzione, l'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate e la retta di equazione $x = -2$.
- Si dimostri infine che la funzione $f(x)$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso. Successivamente, si applichi alla funzione $f(x)$ la traslazione di vettore $\vec{v}(\alpha, \beta)$. Determinare $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, affinché la funzione traslata risulti dispari.

Soluzione

La funzione assegnata è una funzione polinomiale di terzo grado, definita e derivabile in $\mathbb{R}$ per ogni valore dei parametri reali a e c.

Massimo, minimo e flesso

Per rispondere al primo quesito scriviamo le equazioni delle derivate, prima e seconda.

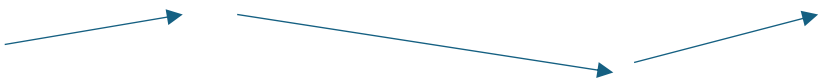
$y'(x) = 3x^2 + 2ax$ $\qquad$ $y''(x) = 6x + 2a$

La derivata prima ammette due zeri reali e distinti : $x = 0$ e $x = -\frac{2}{3}a$ (se $a \neq 0$)

La derivata seconda ammette uno zero reale : $x = -\frac{1}{3}a$

Studio della monotonia e della convessità della curva nel caso in cui sia $a > 0$

x	$-\frac{2}{3}a$	$-\frac{1}{3}a$		0
$y'(x)$	+++++++	-------	--------	++++++++
$y''(x)$	-------	-------	+++++++	++++++++
$y(x)$	crescente concava	decrescente concava	decrescente convessa	crescente convessa



- Il punto $M(-\frac{2}{3}a, \quad \frac{4}{27}a^3 + c)$ è massimo relativo
- Il punto $M_1(0, c)$ è minimo relativo
- Il punto $F(-\frac{1}{3}a, \quad \frac{2}{27}a^3 + c)$ è punto di flesso

Nel caso in cui sia $a < 0$

x	0	$-\frac{1}{3}a$	$-\frac{2}{3}a$	
$y'(x)$	+++++++	-- - - - - - - -	-- - - - -	++++++++++
$y''(x)$	-- - - - - - - -	-- - - - - - - -	+++++++	+++++++
$y(x)$	crescente concava	decrescente concava	decrescente convessa	crescente convessa

- Il punto $M(0, c)$ è massimo relativo
- Il punto $M_1(-\frac{2}{3}a,\ \frac{4}{27}a^3 + c)$ è minimo relativo
- Il punto $F(-\frac{1}{3}a,\quad \frac{2}{27}a^3 + c)$ è punto di flesso

Le coordinate del punto medio del segmento MM_1 sono

$$x = \frac{-\frac{2}{3}a+0}{2} = -\frac{1}{3}a \quad y = \frac{\frac{4}{27}a^3+2c}{2} = \frac{2}{27}a^3 + c$$

e coincidono con quelle del punto F per ogni valore dei parametri reali a e c ($a \neq 0$)

Imponendo le condizioni $\begin{cases} -\frac{2}{3}a = -2 \\ \frac{2}{27}a^3 + c = 6 \end{cases}$ si ottiene $\begin{cases} a = 3 \\ c = 4 \end{cases} \rightarrow$

$$\boldsymbol{y(x) = x^3+3x^2+4}$$

Studio della funzione -Grafico- Area di una regione piana

La funzione $f(x)=x^3+3x^2+4$ è definita e continua in $\mathbb{R}$ ed ha per immagine l'insieme $\mathbb{R}$

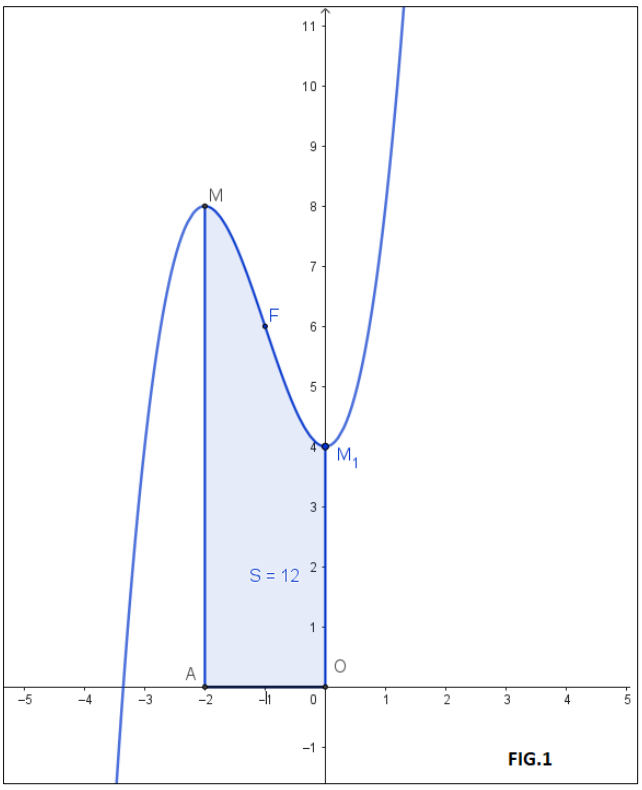
Come si può verificare facilmente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La funzione non ammette asintoti.

In base ai risultati dello studio della monotonia e della convessità nel caso $a > 0$, possiamo affermare che la funzione ha

- un massimo relativo nel punto $M(-2;\ 8)$,
- un minimo relativo nel punto $M_1(0,4)$
- un flesso nel punto $F(-1,6)$.

La regione di cui si chiede l'area è il trapezoide $MAOM_1$ rappresentato in Figura 1



$$Area\ _{MAOM_1} = \int_{-2}^{0}(x^3 + 3x^2 + 4)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{0} = -4 + 8 + 8 = 12$$

Verifica della proprietà di simmetria

Le equazioni della simmetria Σ di centro $F(-1,6)$ sono

$$\begin{cases} X = -2 - x \\ Y = 12 - y \end{cases} \rightarrow \Sigma^{-1} \begin{cases} x = -2 - X \\ y = 12 - Y \end{cases}$$

L'equazione

$$y = x^3 + 3x^2 + 4$$

si trasforma in

$$12 - Y = (-2 - X)^3 + 3(-2 - X)^2 + 4 \rightarrow$$

$$Y = X^3 + 6X^2 + 12X + 8 - 3X^2 - 12X - 12 - 4 + 12 \rightarrow$$

$$Y = X^3 + 3X^2 + 4$$

La funzione $f(x)$ coincide con la sua simmetrica rispetto al punto F; pertanto, è essa stessa simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

Osservazione:

la proprietà può essere dimostrata per la generica $f(x) = x^3 + ax^2 + c$ e giustifica la relazione tra gli estremi relativi e il punto di flesso.

Si tratta di una nota proprietà delle cubiche di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Vedi anche Quesito 6-PNI -Sessione ordinaria-2012

Traslazione

Una funzione $f(x)$ è dispari se $f(-x) = -f(x)$. Il suo grafico è una curva simmetrica rispetto all'origine del riferimento cartesiano.

La traslazione che trasforma la funzione $y = x^3 + 3x^2 + 4$ in una funzione dispari deve, pertanto, portare il punto $F(-1,6)$ nell'origine O(0,0). (Figura 2)

Il vettore $\vec{v}\,(\alpha,\beta)$ avrà per componenti $\begin{cases}\alpha = & 1\\ \beta = & -6\end{cases}$

$$T\begin{cases}X = & x+1\\ Y = & y-6\end{cases} \rightarrow T^{-1}\begin{cases}x = & X-1\\ y = & Y+6\end{cases}$$

L'equazione $y = x^3 + 3x^2 + 4$ si trasforma in

$$Y + 6 = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 + 4 \rightarrow$$

$$Y + 6 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 + 3X^2 - 6X + 3 + 4 \rightarrow$$

$$Y = X^3 - 3X$$

che è una funzione dispari.

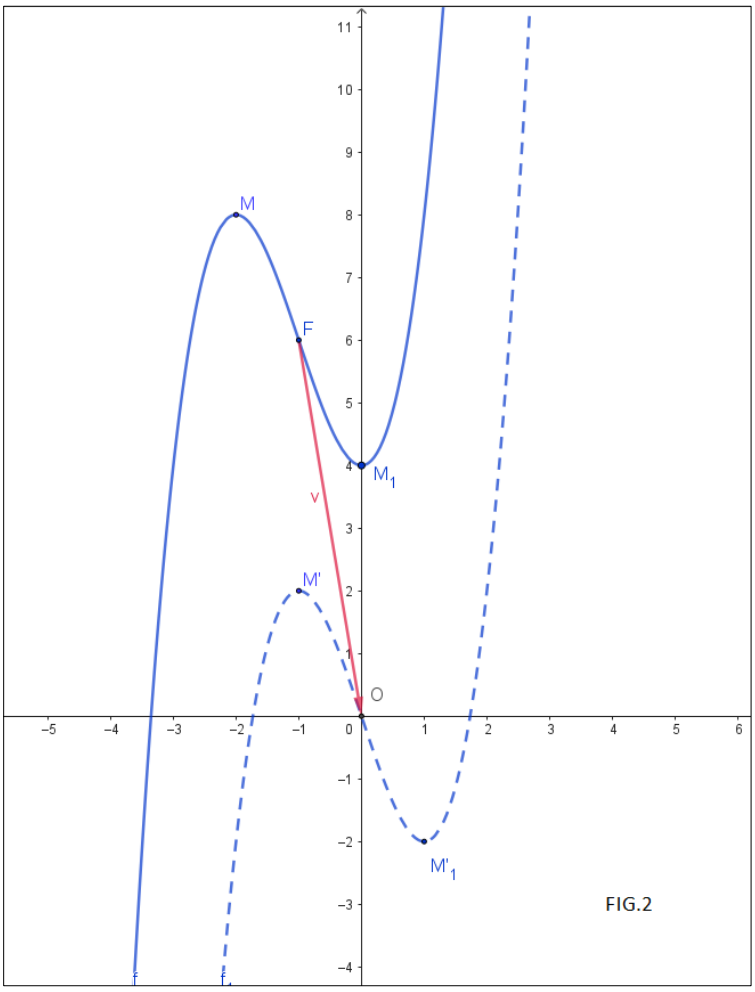


FIG.2