L'angolo solido e la sua misura

di Antonino Giambò

1. Ogni studente sa cos'è un angoloide, però forse non sa che è un particolare angolo solido.

Ma cos'è esattamente un angolo solido?

Al momento ci basti sapere che il concetto di angolo solido è una estensione allo spazio ordinario del concetto di angolo piano.

Anche il concetto di angolo diedro è una estensione allo spazio ordinario del concetto di angolo piano, ma questo non ci interessa poiché non ha a che fare con l'angolo solido.

Comunque, più avanti fornirò una definizione più precisa di angolo solido e, trattandosi di una grandezza geometrica, chiarirò pure come misurarla. Descriverò inoltre un'applicazione alla determinazione dell'angolo solido sotteso da un cono circolare retto rispetto al suo vertice e a qualche relativa conseguenza, in particolare alla dimostrazione di un fondamentale teorema di Fisica. Fornirò infine un esempio particolarmente semplice di misura di un angoloide.

Al fine di procedere con cognizione di causa nella definizione di angolo solido, è necessario aver ben presente quella di angolo piano.

Ora, di definizioni possibili di angolo (piano) ce n'è più d'una. Ci serviremo di quella che più agevolmente si potrà generalizzare quando passeremo allo spazio ordinario.

E, pur consapevoli di dire cose stranote, la riproduciamo per comodità di chi eventualmente avesse la ventura di leggere queste pagine.

2. Si definisce *angolo* (*piano*) ciascuna delle due parti in cui due semirette (i *lati* dell'angolo) aventi la stessa origine (il *vertice* dell'angolo) dividono il piano.

Si sa che un angolo piano può essere misurato in gradi sessagesimali o in gradi centesimali o in radianti.

Ci interessa soffermarci sul concetto di radiante.

Consideriamo, allora, un angolo avente per lati le semirette Oa e Ob e un insieme di circonferenze concentriche aventi il centro comune O (figura 1).

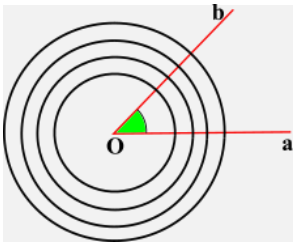

figura 1

L'intersezione dell'angolo con la circonferenza di raggio $r_1, r_2, r_3, \ldots$ è l'arco di circonferenza lungo rispettivamente $L_1, L_2, L_3, \ldots$.

Se indichiamo con ω la misura dell'angolo in un qualunque sistema di misurazione e con g la misura dell'angolo giro nello stesso sistema, ricordando che la lunghezza di una circonferenza di raggio r è $2\pi r$, risulta:

$$\frac{L_1}{\omega} = \frac{2\,\pi\,r_1}{g}, \quad \frac{L_2}{\omega} = \frac{2\,\pi\,r_2}{g}, \quad \frac{L_3}{\omega} = \frac{2\,\pi\,r_3}{g}, \quad \ldots ,$$

da cui segue:

$$\frac{L_1}{r_1} = \frac{2\,\pi\,\omega}{g}, \quad \frac{L_2}{r_2} = \frac{2\,\pi\,\omega}{g}, \quad \frac{L_3}{r_3} = \frac{2\,\pi\,\omega}{g}, \quad \ldots ,$$

e pertanto:

$$\frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2} = \frac{L_3}{r_3} = \cdots .$$

Si desume, da questa conclusione, che il rapporto tra la lunghezza di un arco e quella del raggio della corrispondente circonferenza è invariante al variare della circonferenza. Esso cambia, invece, al mutare dell'angolo. È insomma una caratteristica peculiare dell'angolo.

Proprio tale rapporto si assume come misura dell'angolo in **radianti**.

In altre parole: considerato un angolo (piano), tracciata una circonferenza di raggio r avente il centro nel vertice dell'angolo e indicata con L la lunghezza dell'arco che l'angolo intercetta sulla circonferenza, la misura in radianti dell'angolo è il numero reale ρ tale che:

$$\rho = \frac{L}{r}.$$

Da questa relazione, nel caso particolare in cui si abbia L=r, si deduce ρ=1. Perciò:

1 radiante è la misura dell'angolo (piano) che, su una qualunque circonferenza avente il centro nel vertice dell'angolo, intercetta un arco lungo quanto il raggio della circonferenza.

Si ottengono facilmente le misure in radianti dell'angolo giro, dell'angolo piatto, dell'angolo retto.

Precisamente, se si vuole la misura dell'angolo giro basta tener presente che L è la lunghezza dell'intera circonferenza, per cui L=2πr e, di conseguenza la misura dell'angolo giro è 2π radianti.

Di conseguenza, quella dell'angolo piatto è π radianti e quella dell'angolo retto è $\frac{\pi}{2}$ radianti.

Allo stesso modo per altri angoli, se occorrono le loro misure in radianti.

3. Il ragionamento precedente, relativo all'angolo piano, si estende abbastanza facilmente all'angolo solido, compresa la definizione di questo angolo, cambiando ovviamente le cose che devono essere cambiate.

Partiamo allora dalla definizione di angolo solido.

Si consideri al riguardo, nello spazio ordinario, una curva piana K, chiusa e senza cappi. Per un punto O, non appartenente al piano della curva K, si conducono tutte le semirette di origine O passanti per i punti di K. La superficie formata da tutte queste semirette divide lo spazio in due parti, ciascuna delle quali si denomina ***angolo solido*** (figura 2). (Per comodità denominiamo *superficie conica* la suddetta superficie, anche se non sempre si potrebbe considerare tale, come per esempio quando K è il contorno di un poligono.)

Il punto O si chiama *vertice* dell'angolo solido.

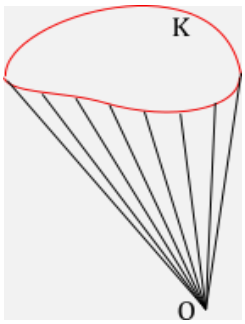

figura 2

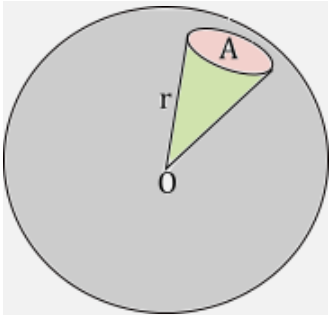

figura 3

Se la curva K è il contorno di un poligono, l'angolo solido è esattamente un angoloide.

Al fine di ottenere la misura di un angolo solido di vertice O, consideriamo un insieme di sfere concentriche aventi il centro nel vertice O.

L'intersezione dell'angolo con la superficie sferica di raggio $r_1, r_2, r_3, \ldots$ è una porzione di questa superficie sferica di area rispettivamente $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

In figura (figura 3) è rappresentata la superficie sferica di raggio r, la quale è intersecata dall'angolo solido secondo la superficie di area A.

È utile, a questo punto, per poter continuare, tener presente la corrispondenza fra gli elementi di un angolo piano e quelli di un angolo solido. Le registriamo in una apposita tabella (tabella 1).

Corrispondenza fra gli elementi di un angolo piano e quelli di un angolo solido	
Angolo piamo di vertice O e misura (generica) ω	Angolo solido di vertice O e misura (generica) Ω
Angolo che ricopre l'intero piano (misura generica g)	Angolo che ricopre l'intero spazio (misura generica G)
Lati dell'angolo	Superficie conica
Circonferenze con centri in O e raggi $r_1, r_2, r_3, \ldots$, le cui lunghezze sono nell'ordine $2\pi r_1, 2\pi r_2, 2\pi r_3, \ldots$	Superfici sferiche con centri in O e raggi $r_1, r_2, r_3, \ldots$, le cui aree sono nell'ordine $4\pi r_1^2, 4\pi r_2^2, 4\pi r_3^2, \ldots$.
Archi di lunghezze $L_1, L_2, L_3, \ldots$ in cui l'angolo interseca le circonferenze.	Porzioni di aree nell'ordine $A_1, A_2, A_3, \ldots$ in cui l'angolo interseca le superfici sferiche.

tabella 1

Se indichiamo con Ω la misura dell'angolo solido in un qualunque sistema di misurazione e con G la misura, nello stesso sistema, dell'angolo che ricopre l'intero spazio, ricordando che l'area di una superficie sferica di raggio r è $4\pi r^2$, risulta:

$$\frac{A_1}{\Omega} = \frac{4\,\pi\, r_1^2}{G}, \quad \frac{A_2}{\Omega} = \frac{4\,\pi\, r_2^2}{G}, \quad \frac{A_3}{\Omega} = \frac{4\,\pi\, r_3^2}{G}, \quad \ldots,$$

da cui segue:

$$\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{4\,\pi\,\Omega}{G}, \quad \frac{A_2}{r_2^2} = \frac{4\,\pi\,\Omega}{G}, \quad \frac{A_3}{r_3^2} = \frac{4\,\pi\,\Omega}{G}, \quad \ldots,$$

e perciò:

$$\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2} = \frac{A_3}{r_3^2} = \cdots.$$

È chiaro, dunque, che il rapporto tra l'area di una porzione di superficie sferica di raggio noto, vista sotto un determinato angolo solido, e quella del quadrato del raggio della stessa superficie sferica è invariante al variare della sfera. Esso cambia, invece, al mutare dell'angolo (solido) sotto cui è vista la porzione di superficie. È insomma una caratteristica peculiare dell'angolo solido.

Proprio tale rapporto si assume come misura in **steradianti** dell'angolo solido.

In altre parole:

Considerato un angolo solido (figura 3), tracciata una sfera di raggio r avente il centro nel vertice dell'angolo e indicata con A l'area della superficie che l'angolo intercetta sulla superficie sferica, la misura in steradianti dell'angolo è il numero reale W tale che:

$$W = \frac{A}{r^2}.$$

Da questa relazione, nel caso particolare in cui si abbia $A=r^2$, si deduce $W=1$. Perciò:

1 steradiante è la misura dell'angolo solido che, su una qualunque superficie sferica avente il centro nel vertice dell'angolo, intercetta una superficie di area uguale al quadrato del raggio della superficie sferica.

Si ottengono facilmente le misure in steradianti dell'angolo solido che ricopre l'intero spazio e dell'angolo solido che ricopre un semispazio.

Precisamente, se si vuole la misura del primo, basta tener presente che A è l'area della superficie sferica, per cui $A=4\pi r^2$ e, di conseguenza la misura dell'angolo che ricopre l'intero spazio è 4π steradianti.

Di conseguenza, quella dell'angolo che ricopre un semispazio è 2π steradianti.

Si dice anche che l'angolo solido sotteso da un'intera sfera misura 4π steradianti e quello sotteso da una semisfera misura 2π steradianti.

4. Vogliamo dimostrare adesso la seguente proprietà:

PROPRIETÀ. L'angolo solido sotteso da un cono circolare retto avente angolo di semiapertura α, rispetto al vertice del cono, misura:

$$W = 2\,\pi\,(1 - \cos\alpha)\,.$$

DIMOSTRAZIONE.

Sia O il vertice del cono di angolo di semiapertura α e sia a il suo apotema. Si traccia la sfera avente centro in O e raggio a: la sua superficie è intersecata dal cono secondo la calotta di altezza HC (figura 4).

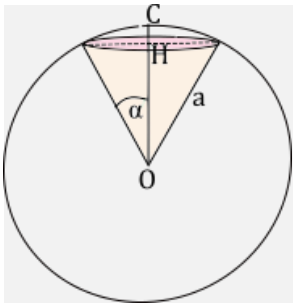

figura 4

La misura dell'angolo solido sotteso dal cono rispetto al vertice del cono medesimo è la seguente:

$$W = \frac{\text{area della calotta}}{a^2}\,.$$

Considerato che:

$$\text{Area della calotta } = 2\,\pi\,a\cdot\overline{HC} = 2\,\pi\,a\cdot(\overline{OC} - \overline{OH}) = 2\,\pi\,a\,\cdot(a - a\cos\alpha) = 2\,\pi\,a^2\,(1 - \cos\alpha)\,,$$

la formula risulta praticamente dimostrata.

- La formula trovata consente di calcolare sotto quali angoli solidi sono visti dalla Terra sia la Luna sia il Sole. Bisogna conoscere, di ciascuno dei due corpi celesti, il raggio e la distanza dalla Terra.

Posto infatti di schematizzare la situazione con una figura (figura 5), in cui T rappresenta la Terra e la sfera può rappresentare sia la Luna sia il Sole, diciamo O il centro di questa sfera, OA il suo raggio e OT la sua distanza dalla Terra. Si trova facilmente che la sfera è vista dalla Terra sotto l'angolo solido sotteso dal cono di vertice T e angolo di semiapertura $\alpha = O\hat{T}A$. TA è tangente alla sfera.

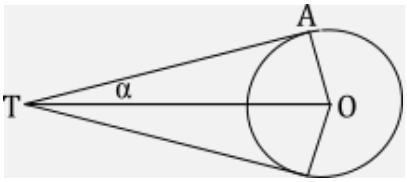

figura 5

Costatato che il triangolo OAT è rettangolo in A, risulta:

$$\sin\alpha = \frac{OA}{OT} \quad \text{e quindi} \quad \alpha = \operatorname{asin}\frac{OA}{OT}\,.$$

Ora:

- nel caso della Luna, si ha OA≈1.737,4 km, OT≈384.400 km, di conseguenza risulta:

$$W_{\text{Luna}} = 2\,\pi\,(1 - \cos\alpha) \approx 2\,\pi\,\left(1 - \cos\left(\operatorname{asin}\frac{1.737{,}4}{384.400}\right)\right) \approx 6{,}28\cdot 10^{-5}\ \text{(steradianti)};$$

- nel caso del Sole, si ha OA≈696.340 km, OT≈149.600.000 km, di conseguenza risulta:

$$W_{\text{Sole}} = 2\,\pi\,(1 - \cos\alpha) \approx 2\,\pi\,\left(1 - \cos\left(\operatorname{asin}\frac{696.340}{149.600.000}\right)\right) \approx 6{,}28\cdot 10^{-5}\ \text{(steradianti)}.$$

Vale a dire che la Luna e il Sole sono visti dalla Terra all'incirca sotto lo stesso angolo solido, di circa $6{,}28\cdot 10^{-5}$ steradianti.

Volendo rapportare questo valore all'angolo solido sotto cui è vista la volta celeste, bisogna tener presente che questo angolo è di 4π steradianti. Per cui, essendo:

$$\frac{6{,}28\cdot 10^{-5}}{4\,\pi} \approx 5{,}0\cdot 10^{-6} \approx \frac{1}{200.000}\,,$$

possiamo concludere che l'angolo solido sotto cui è visto il Sole dalla Terra, che è all'incirca uguale all'angolo solido sotto cui è vista la Luna, è pressappoco la 200.000-esima parte dell'angolo sotto cui è vista la volta celeste.

5. Il concetto di angolo solido è utilizzato nelle scienze sperimentali e in particolare in Fisica. Ne vediamo un'applicazione nella dimostrazione di un fondamentale teorema.

TEOREMA DI GAUSS [1] (per il campo elettrico). Se una carica elettrica Q è posta all'interno di una superficie chiusa S, immersa in un mezzo di costante dielettrica ε, allora il flusso $\Phi(\vec{E})$ del vettore campo elettrico $\vec{E}$ attraverso la superficie S è il seguente:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

DIMOSTRAZIONE.

Sia S una superficie chiusa dello spazio e sia O un punto interno ad essa in cui è posta la carica elettrica Q (figura 6). Consideriamo sulla superficie S un elemento infinitesimo di superficie dS con centro nel punto P.

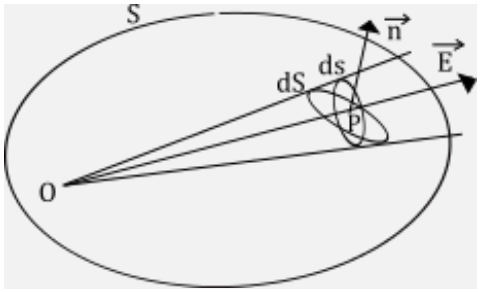

figura 6

Consideriamo il vettore campo elettrico $\vec{E}$ nel punto P e chiamiamo $\vec{n}$ il vettore unitario normale a dS. Il flusso di $\vec{E}$ attraverso l'elemento di superficie dS è, per definizione, il flusso elementare $d\Phi(\vec{E})$ tale che:

$$d\Phi(\vec{E}) = E\, dS \cos\alpha\,,$$

dove α è l'angolo dei due vettori $\vec{E}$ e $\vec{n}$.

Ora, $dS\cos\alpha$ è l'elemento di superficie ds ortogonale al vettore $\vec{E}$. Per cui risulta:

$$d\Phi(\vec{E}) = E\, ds\,.$$

Poniamo adesso l'attenzione sull'angolo solido elementare dW, sotto cui è vista da O la superficie elementare ds. Com'è noto, posto uguale ad r la distanza OP, si ha:

$$dW = \frac{ds}{r^2}\,, \quad \text{da cui segue:} \quad ds = r^2 dW\,.$$

D'altro canto, come conseguenza della legge di Coulomb e per la definizione stessa di campo elettrico in un punto, risulta:

$$E = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

In base alle due precedenti relazioni, dopo debita sostituzione e idonea semplificazione, si ottiene dunque:

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon}\, dW\,.$$

Il flusso del vettore campo elettrico attraverso l'intera superficie S si trova ripetendo il precedente ragionamento per gli infiniti elementi infinitesimi in cui può essere suddivisa la superficie S e sommando i risultati ottenuti. Come dire che bisogna calcolare l'integrale di $d\Phi(\vec{E})$ esteso all'angolo solido sotto cui è vista la superficie S dal punto O. Considerato che quest'angolo misura 4π radianti, il risultato finale è il seguente:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon} \cdot 4\,\pi = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Come si voleva dimostrare.

6. Lo steradiante è la misura di un angolo solido nel Sistema Internazionale (SI). Ma, non inclusa in tale sistema, si considera un'altra misura di un angolo solido ed è il ***grado quadrato***.

Ora, come il legame fra la misura ρ in radianti e la misura g in gradi sessagesimali di un angolo piano è dato dalla legge seguente:

---

[1] Carl Friedrich Gauss, matematico tedesco, 1777-1855.

$$\frac{\rho}{g} = \frac{\pi}{180},$$

allo stesso modo, per analogia, la misura W in steradianti e la misura G in gradi quadrati di un angolo solido sono legati dalla seguente legge:

$$\frac{W}{G} = \left(\frac{\pi}{180}\right)^2.$$

Cosicché, 1 steradiante equivale a $\left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \approx 3.283$ gradi quadrati.

In particolare, gli angoli sotto cui sono visti dalla Terra sia la Luna sia il Sole, la cui misura in steradianti, come noto, è all'incirca $6{,}28 \times 10^{-5}$, hanno pressappoco le seguenti misure in gradi quadrati:

$$G_{Luna} \approx G_{Sole} \approx 6{,}28 \times 10^{-5} \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \approx 0{,}206 \text{ (gradi quadrati)}.$$

Inoltre, come il grado sessagesimale è usato per misurare parti della circonferenza, così il grado quadrato è usato per misurare parti della superficie sferica.

Portiamo un esempio. Supponiamo che la Terra sia sferica e assumiamo che il suo raggio R misuri circa 6.371 km. Osserviamo adesso che l'Italia ha una superficie di circa $3{,}0 \times 10^5$ km^2. Pertanto, l'angolo sotto cui è vista l'Italia dal centro della Terra ha la seguente misura in steradianti:

$$W \approx \frac{3{,}0 \times 10^5}{6.371^2} \approx 7{,}4 \times 10^{-3} \text{ (steradianti)},$$

mentre ha la seguente misura in gradi quadrati:

$$G \approx 7{,}4 \times 10^{-3} \times \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \approx 24{,}3 \text{ (gradi quadrati)}.$$

Naturalmente, l'angolo solido sotto cui è vista la Terra dal suo centro, che, come sappiamo, misura 4π steradianti, ha la seguente misura in gradi quadrati:

$$G = 4\pi\left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \approx 41.253 \text{ (gradi quadrati)}.$$

7. La misura di un angoloide come particolare angolo solido non ha nulla a che vedere con l'ampiezza dell'angoloide intesa come somma delle ampiezze delle sue facce. La determinazione di questa misura è un'operazione piuttosto complicata, basata soprattutto su conoscenze di trigonometria sferica, e non ce ne occupiamo. Nondimeno, giusto per dare una qualche idea, forniamo un esempio particolarmente semplice: la misura dell'angolo solido sotto cui è visto un triangolo sferico dal centro della superficie sferica che lo contiene.

Incominciamo a capire cos'è un triangolo sferico.

A questo proposito, prendiamo, su una superficie sferica, tre punti A, B, C non situati sulla stessa circonferenza massima e li congiungiamo a due a due con il minore degli archi di circonferenza massima passante per essi (figura 7). I tre archi $\widehat{AB}, \widehat{AC}, \widehat{BC}$ dividono la superficie sferica in due porzioni. La minore di esse si denomina *triangolo sferico*.

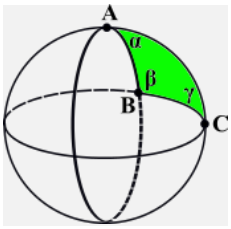

figura 7

Gli angoli α, β, γ, formati da detti archi – uguali agli angoli formati dalle rette tangenti ad essi nei punti A, B, C – si chiamano angoli del triangolo sferico.

Vale il seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA DI GIRARD [2]. Se α, β, γ sono le ampiezze in radianti degli angoli del triangolo sferico ABC, contenuto nella superficie sferica di raggio R, l'area T del triangolo è data dalla seguente formula:

[2] Albert Girard, matematico fiammingo, 1590-1633.

$$T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\, R^2.$$

Detto per inciso, la somma $\alpha+\beta+\gamma$ degli angoli di ogni triangolo sferico è maggiore di π.

- Questo teorema permette di calcolare immediatamente la misura W, espressa in steradianti, dell'angolo solido sotto cui è visto il triangolo sferico di angoli α, β, γ dal centro della superficie sferica di raggio R che lo contiene. Si ha infatti:

$$W = \frac{(\alpha + \beta + \gamma - \pi)\, R^2}{R^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi\,.$$

In particolare, se il triangolo ABC è un triangolo trirettangolo (figura 8), per cui $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$, la sua misura W, espressa in steradianti, è la seguente:

$$W = \frac{3}{2}\pi - \pi = \frac{\pi}{2}.$$

mentre la sua misura G in gradi quadrati è la seguente:

$$G = \frac{\pi}{2}\left(\frac{180}{\pi}\right)^2 \approx 5.157\,.$$

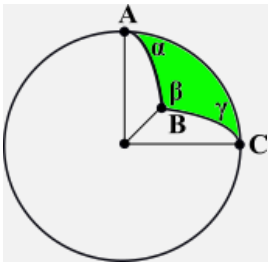

figura 8

BIBLIOGRAFIA.

[1] Wikipedia, libera enciclopedia on-line.