

TEMA 1

L'IMPORTANZA DI UN MODELLO MATEMATICO. LA FORMA DELLA TERRA. LE COORDINATE GEOGRAFICHE

Sfera -Ellissoide. Geoide Equazioni parametriche di una superficie di rotazione.

Proiezione stereografica. Le sezioni del cono.



I popoli antichi pensavano che la Terra fosse piatta e poco estesa, limitata ai territori allora conosciuti. Da questa immagine estrapolano una visione dell'universo che desse soprattutto un'idea di **stabilità**, inizialmente identificata con l'equilibrio dei corpi appoggiati, in seguito, probabilmente con il progredire delle tecniche di costruzione, con l'equilibrio dei corpi sospesi.

Il primo a pensare che la terra dovesse avere una certa curvatura ma anche che non avesse bisogno di sostegni, fu Anassimandro (VI secolo a.C.). Egli non ipotizzava una forma sferica ma piuttosto a un troncone cilindrico, in equilibrio tra forze contrapposte.

Quando alla ricerca della stabilità si sostituì l'esigenza di **armonia, simmetria ed eternità**, la forma sferica fu inevitabilmente privilegiata.

Intorno al IV secolo a.C. si era sviluppata una cosmologia condivisa, quella dell'universo a due sfere, forse introdotta inizialmente dalla scuola pitagorica.

La Terra era una sfera sospesa e ferma nel centro geometrico di una sfera molto più grande e rotante, che portava le stelle. Il Sole si muoveva nel vasto spazio fra la Terra e la sfera delle stelle. Al di fuori della sfera esteriore non c'era né spazio, né materia, nulla. Il modello partiva dall'osservazione del moto dei cieli dal punto di vista terrestre ed obbediva ad una legge o principio costitutivo fondamentale, basato su ordine, stabilità ed eterna ciclicità.

Si tratta di uno schema essenzialmente culturale che già si presenta, però, con una connotazione scientifica. Sicuramente fornì la base per uno studio dal punto di vista geometrico. La Trigonometria sferica, che ha preceduto quella piana, è nata dalle indagini astronomiche e geografiche.

La forma sferica è, in realtà, è un utile modello geometrico che approssima la forma effettiva della terra, la quale dipende da molti fattori e da complesse interazioni tra di essi.

Il modello a ellissoide di rotazione, di equazione $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, con $a > b$, tiene conto dello schiacciamento polare dovuto al moto di rotazione attorno all'asse.

Misurazioni molto accurate suggeriscono un modello più generale, un ellissoide di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, in cui sia i meridiani, sia i paralleli sono ellissi.

Dall'ellissoide al geoide

Dal punto di vista fisico la superficie terrestre è una superficie equipotenziale del campo gravitazionale, associato alla massa planetaria, perpendicolare in ogni punto alla direzione del filo a piombo. L'esperienza prova che non si tratta di una superficie sferica, nè ellissoidale, ma di una superficie irregolare, **il geoide**, di cui ci vengono forniti modelli approssimati localmente o globalmente.

Per assegnare a ogni punto le relative coordinate geografiche, per le rappresentazioni cartografiche, per la navigazione col GPS, si utilizza un ellissoide di riferimento, cioè un ellissoide di rotazione che fornisce la migliore approssimazione del geoide.

Tradizionalmente quando si definisce un ellissoide di riferimento si specifica il raggio equatoriale a e il rapporto di appiattimento $\alpha = \frac{a-b}{a}$ o il suo inverso. Il raggio polare è quindi ricavato come $b = a(1 - \alpha)$

Lo sviluppo delle tecnologie permette valutazioni sempre più accurate dei due semiassi, con il passare degli anni. Ecco i parametri maggiormente utilizzati in Italia

Ellissoide	a (m)	b (m)	$1/\alpha$	adozione
GRS80 (1980)	6 378 137	6 356 752,31414	298,257222101	Cartografia Ufficiale italiana
WGS84 (1984)	6 378 137	6 356 752,3142	298,257223563	Navstar GPS

Le coordinate geografiche- Due quesiti assegnati agli esami di Stato

1. Esame di stato- Sessione ordinaria 2007. Quesito 10-ordinamento e PNI

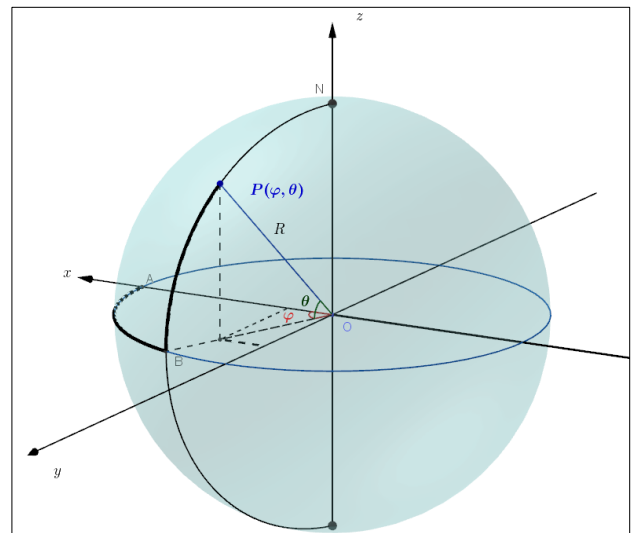
Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a meridiani e a paralleli, a latitudini e a longitudini. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S , come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

L'argomento, a suo tempo, era sicuramente ben noto agli studenti. Molti, tuttavia, si sono limitati ad un approccio piuttosto superficiale e hanno incontrato una certa difficoltà nella corretta impostazione geometrica.

Proposta risolutiva

Supponiamo che la superficie sferica S sia stata ottenuta dalla rotazione, intorno all'asse z , di una semicirconferenza C_0 appartenente al piano $y = 0$, con centro nell'origine e raggio R . Si può passare dalla **rappresentazione parametrica** di quest'ultima

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ z = R \sin \theta \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



a quella della superficie sferica

$$P(\varphi, \theta) \begin{cases} x = R \cos \theta \cos \varphi \\ y = R \cos \theta \sin \varphi \\ z = R \sin \theta \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

I parametri φ e θ fungono da coordinate e individuano la posizione di P sulla superficie sferica.

Se $\varphi = 0$ il punto P descrive, al variare di θ , la semicirconferenza C_0 .

Ad ogni altro valore costante $\bar{\varphi}$ corrisponde una posizione assunta da C_0 nella sua rotazione intorno all'asse z , appartenente al piano di equazione $y = \tan \bar{\varphi} \cdot x$

I meridiani sono le coppie di semicirconferenze intercettate sulla superficie sferica dal fascio di piani passanti per l'asse z .

Se $\theta = 0$ il punto P descrive una circonferenza appartenente al piano $z = 0$ (**equatore**). Ad ogni altro valore costante $\bar{\theta}$ corrisponde un piano, parallelo a quello equatoriale, che taglia la sfera lungo una circonferenza di centro $(0,0, R \sin \bar{\theta})$ e raggio $R \cos \bar{\theta}$.

I paralleli sono le circonferenze intercettate sulla superficie sferica dal fascio di piani perpendicolari all'asse z .

I meridiani e i paralleli costituiscono il **reticolo geografico** sulla superficie terrestre.. L'equatore è il parallelo di lunghezza massima, equidistante dai poli.

Il piano equatoriale divide la sfera terrestre in due emisferi: quello boreale dalla parte del polo Nord e quello australe dalla parte del polo Sud.

L'angolo θ rappresenta la **latitudine**, (indicata con β in **geografia astronomica**) ovvero la distanza angolare di un punto della superficie terrestre dall'equatore, misurata lungo l'arco di meridiano corrispondente. Al segno positivo o negativo di β si sostituisce la notazione Nord-Sud, rispettivamente.

Scelto un mediano di riferimento, corrispondente alla semicirconferenza C_0 , l'angolo φ rappresenta la **longitudine** (indicata con λ in **geografia astronomica**) ovvero la distanza angolare di un punto dal meridiano principale, misurata lungo l'arco di parallelo corrispondente.

Al segno positivo o negativo di λ si sostituisce la notazione Est -Ovest, rispettivamente.

Dal 1884 (Conferenza internazionale di Washington), il meridiano fondamentale, adottato da tutte le nazioni, è quello che attraversa l'osservatorio di Greenwich.

2. Esame di stato- Sessione suppletiva 2008. Quesito 2- PNI

Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine $\lambda = 23^\circ 27'$ nord)?

La probabilità richiesta è uguale al rapporto tra l'area " favorevole" al verificarsi dell'evento e l'area dell'intera superficie terrestre, che supporremo sferica.

La porzione di superficie terrestre favorevole all'evento

$E: \{ \text{il meteorite cade in un punto che si trovi tra l'equatore e il tropico del Cancro} \}$ è una calotta sferica a due basi la cui area è $S = 2\pi R h$, con R raggio della sfera e h altezza della calotta (distanza tra i due piani secanti).

La definizione di latitudine suggerisce che $h = R \sin \lambda$, pertanto

$$P(E) = \frac{2\pi R^2 \sin \lambda}{4\pi R^2} = \frac{\sin \lambda}{2} \approx 20\%$$

Cartografia, proiezioni e trasformazioni

In ogni epoca si è manifestata la necessità di tracciare mappe del territorio conosciuto e di utilizzare strumenti matematici adeguati.

La familiarità con le carte geografiche ci induce a pensarle come rappresentazioni ridotte e approssimate della superficie terrestre ; l'intuizione ci dice che non è possibile proiettare un globo in un piano senza commettere deformazioni.

Nel linguaggio matematico abbiamo a che fare con una trasformazione di coordinate caratterizzate da opportuni invarianti (gli angoli, le distanze o l'area). Geometricamente si procede con operazioni di proiezione e sezione per trasformare il reticolo geografico sferico in un reticolo piano.

Generalmente si utilizzano superfici di supporto che siano sviluppabili su un piano, come coni o cilindri.

Così , si esprime Tolomeo, nel suo trattato *Geographia*, nei riguardi della cartografia:

<<Tali cose appartengono alla più elevata e meravigliosa delle occupazioni intellettuali, cioè a dire il mostrare alla mente umana, attraverso la matematica, sia il cielo stesso nella sua natura fisica mentre lo vediamo ruotare introno a noi, sia la natura della terra per tramite di una sua rappresentazione, poiché la terra reale, essendo enorme e non circondandoci, non può essere ispezionata da alcuna persona nè nel suo complesso nè pezzo a pezzo".>>

La *Geographia* di Tolomeo arrivò in Occidente alla fine del XIV secolo, periodo in cui i traffici commerciali e i viaggi a scopo esplorativo rinnovavano l'interesse per le conoscenze geografiche. Il trattato di Tolomeo fornì molte informazioni relative alla toponomastica o alla localizzazione dei luoghi e pose una base metodologica per gli sviluppi della cartografia rinascimentale.

La base matematica (la trigonometria di Tolomeo e la geometria di Euclide e di Apollonio), si è in seguito arricchita con i contributi dell'Algebra e del Calcolo differenziale. La matematica dei moderni sistemi informativi geografici , utilizzati nella cartografia digitale, spazia tra Algebra lineare, Teoria dei grafi, Probabilità e Statistica.

Osserviamo , però, che le informazioni metriche e qualitative sono sempre quelle della cartografia tradizionale, basata sul metodo delle proiezioni.

La proiezione stereografica

Di particolare interesse, sia per la Geografia astronomica sia per la Matematica, è la proiezione di una sfera da un suo punto N su un piano π parallelo al piano tangente in N .

Se P è un punto della sfera, diverso da N , il suo corrispondente è il punto P' del piano π tale che N, P e P' risultano allineati.

Tolomeo ne descrive le applicazioni nel *Planisfero* utilizzando varie proprietà geometriche che rimandano al trattato sulle coniche di Apollonio.

La proiezione stereografica gode di notevoli proprietà geometriche:

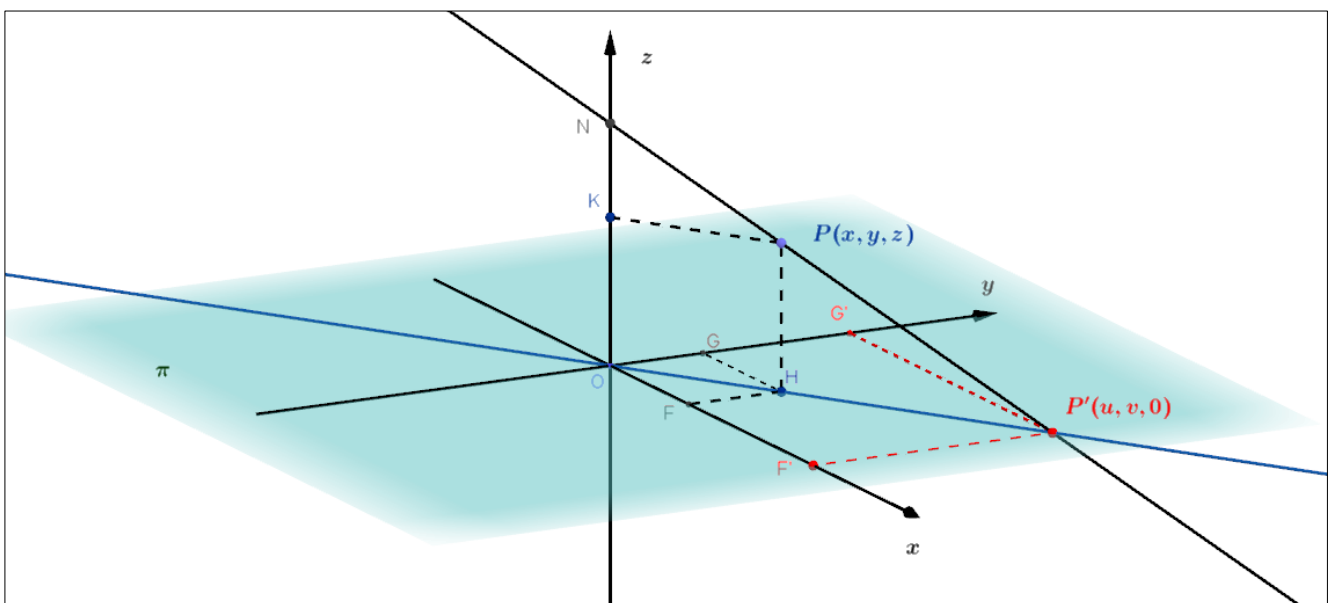
- a) le circonferenze esistenti sulla sfera vengono proiettate su π in circonferenze, ad eccezione di quelle passanti per il punto N , le quali si trasformano in rette;
- b) si conserva l'angolo di due curve tracciate sulla sfera (si tratta quindi di una proiezione isogonale o conforme). In particolare, , con riferimento alla figura, conserva la perpendicolarità tra meridiani e paralleli, proprietà quest'ultima che la rende particolarmente utile in cartografia, per es. nella costruzione del planisfero

Costruzione e analisi della trasformazione

Caso particolare : proiezione dal polo Nord sul piano equatoriale

In un riferimento cartesiano $O(x, y, z)$ è data una sfera S di centro O e raggio unitario.

Siano $P(x, y, z) \in S$ (non coincidente con N) e $P'(x', y', 0)$ due punti che si corrispondono in una proiezione stereografica di polo $N(0,0,1)$ e piano di proiezione coincidente col piano xy .



1. Dimostrare che, posto

$x' = u, \quad y' = v$ si ottengono, per la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, le seguenti equazioni parametriche razionali

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{cases}$$

Con riferimento alla figura, applicando il teorema di Talete si ottiene la seguente catena di rapporti uguali

$$\frac{\overline{OF'}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{F'P'}}{\overline{FH}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{KN}} \rightarrow \frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{1}{1-z}$$

Sostituendo $x = u(1 - z)$ e $y = v(1 - z)$ nell'equazione della sfera, si ottiene

$$u^2(1 - z)^2 + v^2(1 - z)^2 = 1 - z^2$$

Essendo $z \neq 1$, si dividono entrambi i membri dell'equazione per $(1 - z)$ ottenendo un'equazione di primo grado in z dalla quale possibile ricavare $z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$ da cui, con le opportune sostituzioni e semplificazioni, si ottengono le altre due coordinate, in funzione di u e v

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}$$

2. Dimostrare che la proiezione stereografica trasforma le circonferenze della superficie sferica in rette o circonferenze del piano equatoriale, a seconda che il punto N appartenga o no alla circonferenza,

Sia $C \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$ una circonferenza di S

L'equazione dell'immagine di C si ottiene sostituendo i valori di x, y, z in funzione delle due variabili u e v , nell'equazione del piano

$$a \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} + b \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} + c \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} + d = 0 \rightarrow$$

$$(c + d)u^2 + (c + d)v^2 + 2av + 2bv + d - c = 0$$

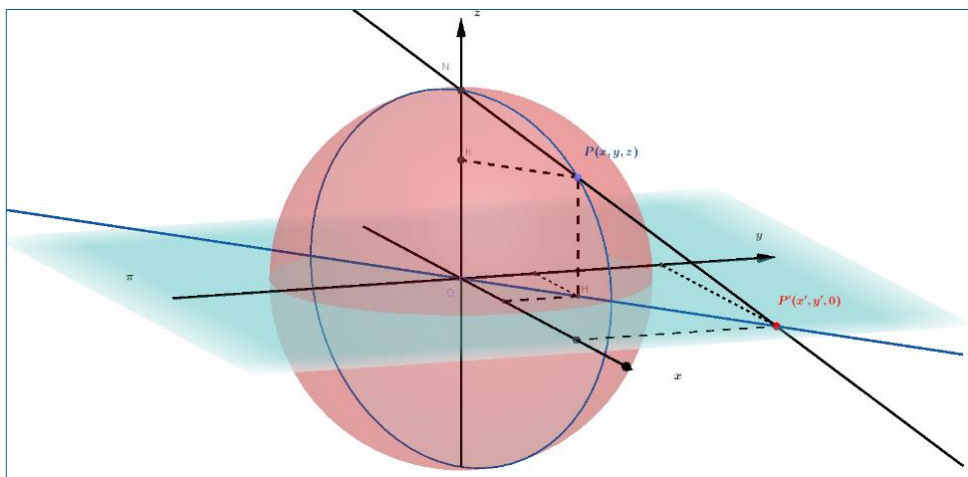
L'ultima equazione trovata, nelle coordinate u e v , rappresenta

- una circonferenza se $(c + d) \neq 0$
- una retta se $(c + d) = 0$

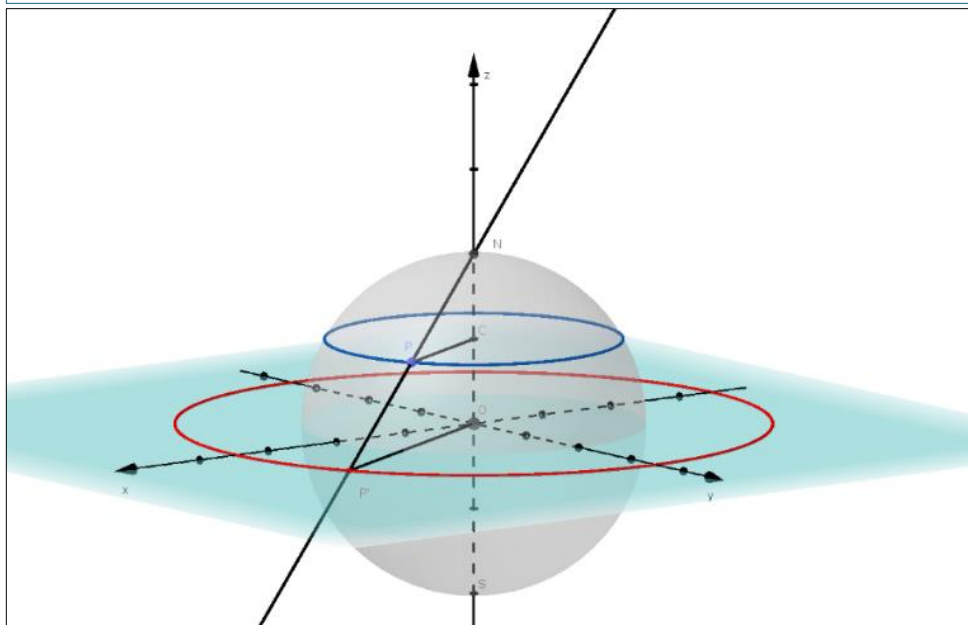
Il secondo caso si ottiene se e solo se $N \in C$. La retta immagine di C è l'intersezione del piano di C con il piano di proiezione

Esempi grafici

Proiezione dei meridiani e dei paralleli

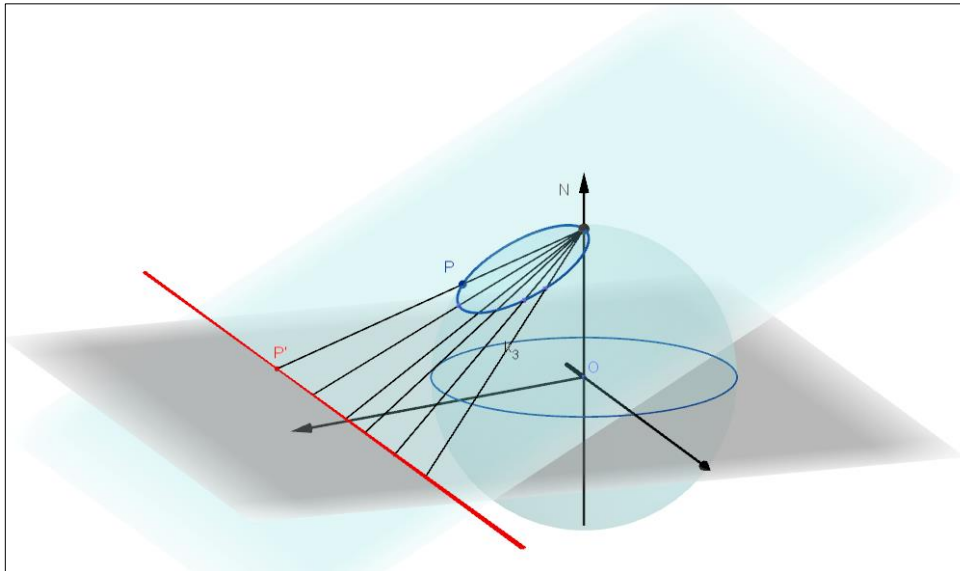


Poichè, come si verifica facilmente, $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ possiamo affermare che, qualunque sia la posizione di P sul meridiano fissato, P' appartiene alla retta, intersezione del piano di proiezione col piano NOP



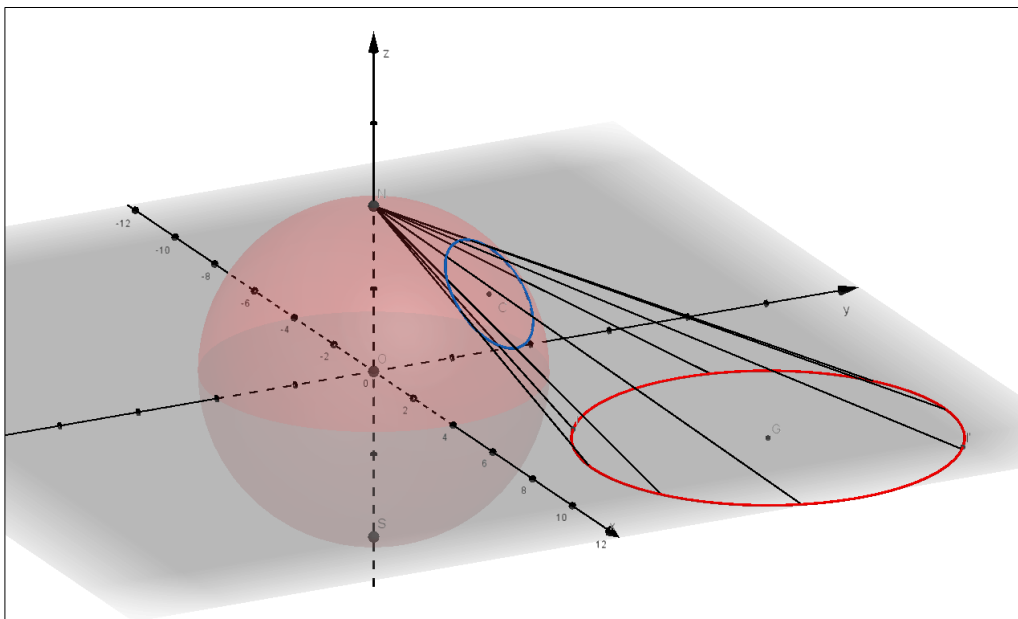
Poichè $\frac{\overline{PO}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{NO}}{\overline{NC}} = \text{costante}$, se P descrive una circonferenza di centro C e raggio $\overline{PC}$, P' descriverà una circonferenza di centro O e raggio $\overline{CO}$

Proiezione di una circonferenza passante per N



Le rette NPP' giacciono tutte nel piano cui appartiene la circonferenza, pertanto P' descrive la retta intersezione del suddetto piano con il piano di proiezione

Proiezione di una generica circonferenza non passante per N

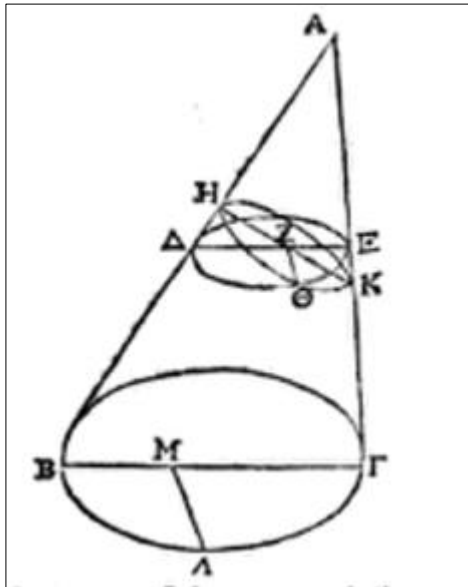


Osservazione- Le sezioni circolari del cono obliquo

Le rette che dal punto N proiettano la circonferenza C nella circonferenza C' appartenente al piano di proiezione π , sono le generatrici di un cono (di vertice N e direttrice C).

Se C appartiene a un piano parallelo a π , il cono è retto, le sezioni con i piani paralleli alla base sono sempre circonferenze e sono le uniche sezioni circolari, corrispondenti in un'omotetia di centro N .

Nel caso più generale si ottiene un cono obliquo per il quale esistono due giaciture di sezioni circolari, una proprietà non sempre nota agli studenti.



Nel primo libro del suo trattato sulle Coniche, con la prop.1_5, Apollonio introduce il concetto di sezioni antiparallele, “**sectio subcontraria**” secondo le traduzioni in lingua latina.

Si tratta di una serie di sezioni circolari del cono che coincidono con quelle parallele alla base solo se il cono è retto.

Se il cono è obliquo, infatti, si ottiene una sezione circolare anche procedendo nel modo seguente:

si considera il triangolo ABC , sezione assiale principale, ottenuta cioè con un piano passante per

l'asse AO e perpendicolare al piano di base

Si consideri la retta dello stesso piano che stacca sul triangolo ABC un triangolo ad esso simile AHK ma con gli angoli posizionati in modo contrario, cioè tale che

$$A\hat{H}K = A\hat{C}B = \gamma \quad e \quad A\hat{K}H = A\hat{B}C = \beta$$

La suddetta retta deve essere inclinata sulla retta BC di un angolo di ampiezza $\gamma - \beta$

Se si taglia la superficie conica con un piano perpendicolare al piano ABC e contenente la retta HK , la sezione S_a così ottenuta è una circonferenza (sezioni antiparallele)

