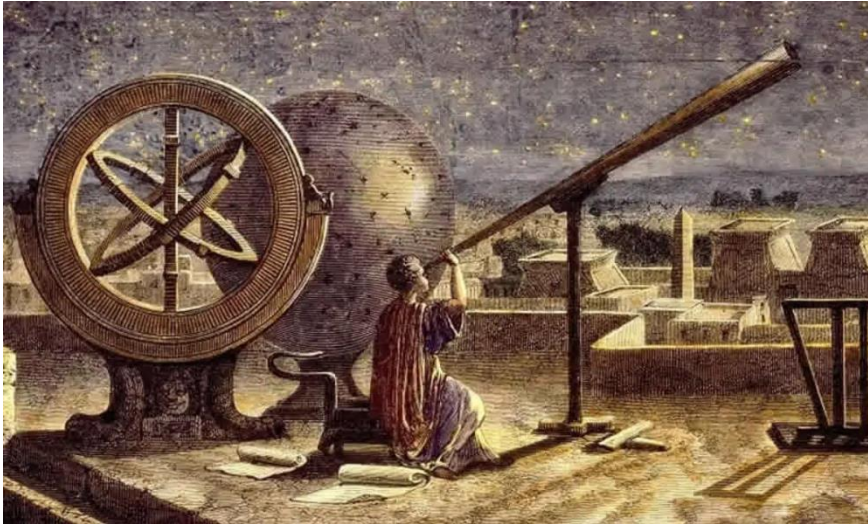


## TEMA 2

**LA DIALETTICA LOCALE- GLOBALE IN ASTRONOMIA E IN COSMOLOGIA- CENNI STORICI ED EPISTEMOLOGICI. CONCETTO DI CURVATURA. GEOMETRIA DELLA SFERA . PROBLEMI GEOMETRICI COLLEGATI CON LA SFERICITÀ DELLA TERRA . TRIANGOLI IN TERRA E IN CIELO.**



L'osservatorio di Alessandria ai tempi di Ipparco di Nicea

L'opposizione *locale/globale* – ossia l'insieme delle relazioni fra *il tutto* e *le parti* che lo compongono – determina il modo in cui costruiamo la nostra rappresentazione dello spazio che ci circonda, e quindi la nostra conoscenza della realtà.

Lo spazio che ci circonda può essere la terra su cui viviamo o l'intero universo.

Per la prima non è stato difficile passare ad un modello di struttura globale e conoscerne la forma e le dimensioni, trattandosi pur sempre di un oggetto immerso nello spazio, un oggetto che può essere studiato geometricamente servendosi di un riferimento esterno.

Il matematico, geografo ed astronomo Eratostene (tra il 240 *a. C* e il 230 *a. C.*) riuscì a calcolare le dimensioni della Terra, supposta sferica, grazie alla nota proprietà per cui si può ricostruire l'intera circonferenza a partire da qualunque suo arco, comunque piccolo.

Non è la stessa cosa voler indagare sulle proprietà dell'universo, del quale possiamo fare solo un'indagine locale, dal <<di dentro>>. Questa conoscenza si costruisce pertanto attraverso l'osservazione, rielaborata con strumenti matematici adeguati, ma necessita anche di teorie fisiche locali e principi generali che ci aiutano ad estendere la struttura locale della regione di spazio osservata alla struttura dell'intero universo.

I primi modelli cosmologici, anche quelli meno ingenui, formulati dai pensatori greci dell'età classica ed ellenistica, erano modelli descrittivi, in cui gli strumenti matematici servivano per descrivere l'universo, non per indagarlo.

Il modello a sfere omocentriche, perfezionato da Tolomeo, rimase in auge per molti secoli ed entrò in crisi quando al suo complesso apparato matematico fu contrapposto un modello eliocentrico più semplice, in sintonia con l'evoluzione di concetto di spazio e con le idee innovative in ambito filosofico, scientifico ed artistico.

Nella tradizione filosofica e scientifica che ha le sue origini in Platone, Aristotele ed Euclide, non si fa mai riferimento ad uno spazio concepito come ambiente capace di contenere gli oggetti e pertanto ad essi preesistente.

La geometria nasce, infatti, come studio delle proprietà delle figure, non dello spazio in cui sono immerse. Curve e superfici sono definite essenzialmente con metodi costruttivi e le loro proprietà sono note globalmente.

La Fisica di Galileo e la Geometria di Cartesio spostarono l'attenzione sul "sistema di riferimento" e posero le basi per la concezione di uno spazio infinito, omogeneo e isotropo.

Con Newton il problema dello spazio è ricondotto al problema del moto e del riferimento inerziale. Le leggi della Meccanica sono le stesse per tutti i riferimenti inerziali, che pertanto sono tutti tra di loro equivalenti. Solo considerazioni di carattere pratico o convenzionali suggeriscono la scelta di un riferimento privilegiato, a seconda dei casi: la terra, le stelle fisse etc.

L'impossibilità di definire un riferimento assoluto sembra a noi abbastanza naturale, dato che il concetto di Relatività è ormai profondamente radicato nella cultura moderna, ma apparve agli scienziati che proseguirono l'opera di Galileo, come un punto debole della costruzione scientifica.

Se non esiste un riferimento assoluto, i concetti di moto e quiete perdono completamente significato. Newton sentì perciò il bisogno di fondare la sua meccanica su basi solide e definisce uno Spazio e un Tempo che abbiano realtà autonoma rispetto agli oggetti e ai fenomeni che li coinvolgono

*<< La svolta si ha nel XIX secolo, grazie agli enormi progressi del metodo delle coordinate e del calcolo differenziale. Con l'introduzione del calcolo infinitesimale, le coordinate permettono l'analisi delle proprietà differenziali degli oggetti (equazioni delle tangenti, delle normali, struttura dei punti singolari, ecc.). Ecco apparire i primi teoremi generali sulle curve algebriche e la 'solidarietà' che esiste tra la loro struttura locale e quella globale... L'approfondimento di tali problemi porterà,*

*durante il XIX secolo, a una completa ristrutturazione del concetto di spazio ambiente nel quale gli oggetti geometrici si trovano immersi.*>> JEAN PETITOT, Locale/globale.

La costruzione delle Geometrie non euclidee riaprì inoltre il dibattito sui rapporti tra Geometria ed esperienza e sulla natura dello spazio fisico.

Sembra che lo stesso Gauss provò ad indagare sulla natura euclidea o non euclidea dello spazio fisico con un esperimento (triangolazione di Hannover-tra il 1818 e il 1847).

Tralasciando il problema epistemologico sulla valenza probatoria di questo genere di esperimenti, osserviamo che il problema che si pone Gauss è molto complesso e profondo:

***se non abbiamo riferimenti esterni, come l'osservazione degli astri, possiamo dedurre dalla sola rilevazione geodetica la forma della Terra? In altre parole, è possibile stabilire la curvatura della Terra compiendo soltanto misurazioni sulla sua superficie?***

Il principale, e più innovativo, strumento teorico introdotto da Gauss è il concetto di **curvatura intrinseca**, cioè determinabile utilizzando solo operazioni eseguite su elementi dell'oggetto.

Intuitivamente, la curvatura gaussiana misura, in un certo senso, quanto una superficie curva differisce da un piano (curvatura nulla)

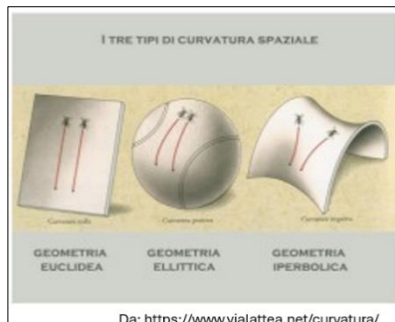
Gauss definì superficie la curvatura intrinseca di una nel modo seguente:

Si individua la retta normale alla superficie in un punto. Poi andiamo a considerare tutti i piani passanti per tale retta: essi sezioneranno la superficie dando luogo a linee diverse, ciascuna caratterizzata da un cerchio osculatore di raggio  $R$  e da una curvatura  $1/R$ . Un teorema dovuto ad Eulero afferma che i piani che individuano la massima curvatura e quella minima (dette curvature principali) sono perpendicolari e Gauss definì la curvatura (gaussiana) della superficie come **il prodotto delle curvature principali**. In formula:  $k = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}$ .

Esempi : la sfera di raggio  $R$ . In tutti i suoi punti i piani che vanno a sezionarla, nel modo precedentemente indicato, descrivono sempre una circonferenza di raggio  $R$ , per cui la curvatura sarà in tutti i punti  $1/R^2$ .

Consideriamo invece un cilindro di raggio  $r$ . È semplice verificare che le due direzioni principali sono quella parallela e perpendicolare all'asse del cilindro, le cui rispettive curvature, valgono  $\kappa_1 = 0$  (si tratta della curvatura di una retta) e  $\kappa_2 = 1/r$

(è infatti la curvatura di una circonferenza). La curvatura gaussiana del cilindro vale dunque 0.



La curvatura ha un segno in quanto il prodotto delle due curvature principali potrà essere positivo o negativo a seconda che i due cerchi osculatori giacciono dalla stessa parte rispetto alla superficie, oppure da parti opposte.

Alle superfici di curvatura nulla corrisponde la geometria euclidea, alla curvatura positiva la geometria ellittica e alla curvatura negativa la geometria iperbolica

**Riemann**, allievo di Gauss, sviluppando le idee del maestro sulla geometria differenziale delle superfici, mette a fondamento della geometria una nuova nozione, quella di **varietà riemanniana**.

Lo spazio in cui viviamo è una particolare varietà triestesa e la geometria studia le diverse possibilità, le diverse forme globali che lo spazio potrebbe assumere a partire dalle proprietà locali, le sole che l'esperienza empirica ci permette di verificare.

La Relatività Generale di Albert Einstein (1916) ha rappresentato il fondamento della cosmologia moderna. Einstein individua nella Geometria di Riemann e negli ulteriori sviluppi nel Calcolo tensoriale di Ricci-Curbastro, gli strumenti matematici adatti per scrivere la sua equazione fondamentale che lega tra di loro le proprietà metriche dello spazio con il contenuto di massa-energia. Le soluzioni, di tipo locale, non determinano la topologia globale, ma ne regolano le possibili scelte.

### Geometria della Sfera. Area di un triangolo sferico

La geometria della sfera è non euclidea (modello di Riemann per una geometria ellittica)

- Il piano è costituito da una superficie chiusa (per comodità potremmo pensare ad una superficie sferica)
- I punti sono coppie di punti diametralmente opposti
- Le rette per due punti sono le circonferenze massime passanti per essi

In questa geometria, oltre alla non esistenza di rette parallele, si può dimostrare che:

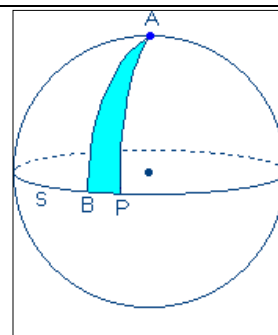
- la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di un angolo piatto
- non esistono triangoli simili, salvo quando sono anche congruenti
- tutte le perpendicolari ad una "retta" passano per una medesima coppia di punti, che sono diametralmente opposti.

### Quesito- Esempio

La figura a lato rappresenta un triangolo nel modello di Riemann per la geometria ellittica.

Supponendo A e B fissi, per quale posizione di P sulla circonferenza S la somma degli angoli interni è uguale a  $\frac{3}{2}\pi$ ?

Se la sfera ha raggio unitario, qual è il valore dell'area del triangolo corrispondente?



### Soluzione

I meridiani AB e AP tagliano ortogonalmente la circonferenza S; pertanto, la somma degli angoli interni è uguale a  $\frac{3}{2}\pi$  se sono anche ortogonali in A i meridiani AB e AP.

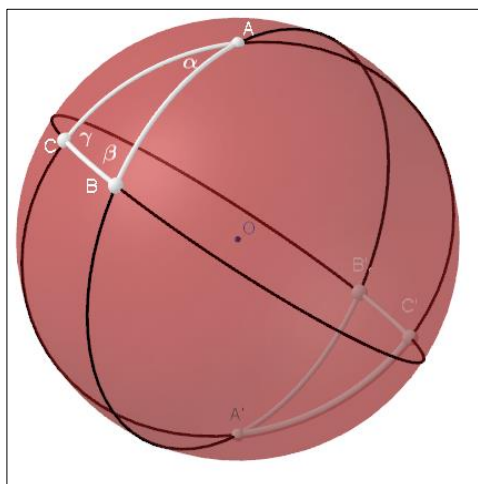
Indicato con O il centro della sfera, P deve appartenere al diametro di S, perpendicolare a OB.

In questo caso il triangolo sferico ABP equivale a  $\frac{1}{8}$  della superficie sferica; quindi, la sua area è uguale a  $\frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}$  se il raggio è unitario.

### Osservazione e generalizzazione

Per tutti i triangoli sferici ABP dell'esempio precedente la somma degli angoli è compresa fra  $\pi$  e  $3\pi$ .

Poiché facendo tendere a zero l'angolo in A la somma degli angoli tende a  $\pi$  e si intuisce che la somma degli angoli vari al variare dell'area del triangolo: tanto maggiore è l'area, tanto maggiore è la somma angolare.



**Queste proprietà possono essere generalizzate**

Definito l'**eccesso sferico** come la differenza

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

dove  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono le ampiezze degli angoli interni del triangolo sferico T, si dimostra che l'area del triangolo è direttamente proporzionale a  $\varepsilon$ . **Un triangolo di piccola area non differisce molto da un triangolo piano, in accordo con l'intuizione che ci fa percepire come piatta una piccola zona di una grande sfera.**

**Dimostrazione della formula**

$Area_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) R^2$  dove  $R$  è il raggio della sfera - **Teorema di Girard (1625)**

Su una superficie sferica, di centro  $O$  e raggio  $R$ , è tracciato il triangolo  $T$  di vertici  $A, B, C$ . Da ciascun vertice passano due circonferenze massime che formano una coppia di fusi sferici simmetrici rispetto al diametro che passa per il vertice stesso.

Ciascuna coppia di fusi contiene sia il triangolo  $ABC$ , sia il triangolo antipodale  $T'$  di vertici  $A', B', C'$  (simmetrico rispetto a  $O$ ). Pertanto, l'unione delle 3 coppie di fusi equivale all'intera superficie sferica ma la somma delle loro aree è maggiore dell'area della superficie sferica in quanto in essa l'area  $Area_T = Area_{T'}$  è conteggiata 6 volte anziché 2.

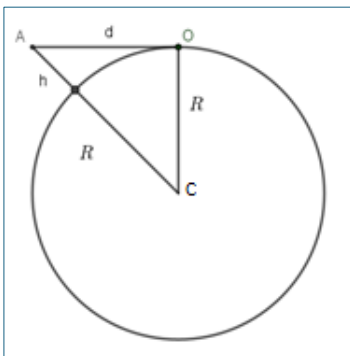
Dalla relazione

$2 \cdot (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) R^2 = 4\pi R^2 + 4 \cdot Area_T$  si deduce

$$Area_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) R^2$$

**Semplici problemi geometrici collegati alla sfericità della terra** Non c'è bisogno di contemplare la Terra dallo spazio per capire che non può essere piatta. Gli studenti, anche i più giovani, conoscono le prove addotte in passato, dalla linea dell'orizzonte sensibile che appare curva, all'osservazione dell'ombra della Terra proiettata sulla Luna, durante le eclissi. Immaginiamo, inoltre, di trovarci su una spiaggia e di osservare una nave all'orizzonte che si muove verso di noi. La prima cosa che scorgiamo sono gli alberi, le ciminiere, le parti alte e dopo lo scafo.

1. L'immagine della nave che si avvicina all'osservatore terrestre suggerisce il seguente modello geometrico che permette di determinare una relazione tra l'altezza  $h$  dell'albero della nave e la distanza  $d$  dell'osservatore che riesce a vederlo.



Se indichiamo con  $O$  l'osservatore, con  $A$  la sommità dell'albero e  $C$  il centro della terra, basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo  $AOC$  per trovare la relazione  $(R + h)^2 = d^2 + R^2$  dove  $R$  è la misura del raggio terrestre

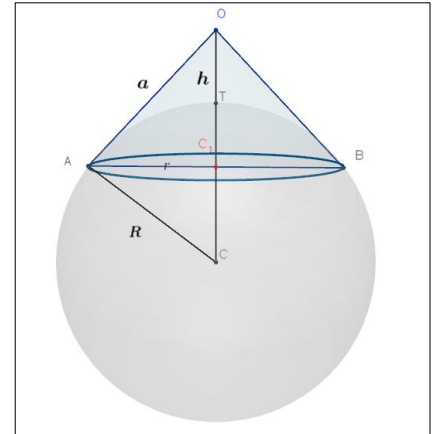
La relazione finale  $d = \sqrt{h^2 + 2Rh}$  può essere approssimata da  $d \sim \sqrt{2Rh}$ , essendo  $h^2$  trascurabile rispetto a  $2Rh$ . La proporzionalità fra  $d$  e  $\sqrt{h}$  suggerisce

**alcune riflessioni o stime quantitative.**

## 2. Il raggio dell'orizzonte

Nel linguaggio comune l'orizzonte è quella circonferenza che sembra dividere il cielo dalla terra. Il raggio dell'orizzonte , ovvero la distanza dell'orizzonte visibile sul mare, è teoricamente la portata massima delle comunicazioni e della visibilità. Qual è il modello geometrico più idoneo per calcolarlo?

L'osservatore  $O$  si trova alla quota  $h$  sul livello del mare (punto  $T$  situato sulla superficie terrestre). Costruiamo il cono di vertice  $O$ , le cui generatrici siano tangenti alla sfera di centro  $C$  e raggio  $R$  che rappresenta la terra. Il luogo dei punti di contatto è una circonferenza di centro  $C_1$ , base della calotta sferica di altezza  $C_1T$ , ovvero della porzione di superficie terrestre visibile dall'osservatore.



Se  $h \ll R$ , l'osservatore ha l'impressione di essere al centro di un cerchio avente per bordo la circonferenza di base della calotta.

E' ragionevole, pertanto chiamare **raggio dell'orizzonte** l'apotema  $OA$  del cono tangente.

$$a^2 = \overline{OA}^2 = (R + h)^2 - R^2 \rightarrow a = \sqrt{h^2 + 2Rh}$$

Avendo però supposto  $h \ll R$ , possiamo approssimare  $a \approx \sqrt{2Rh}$

Anche in questo caso può essere interessante stimare il valore di  $a$  per altezze diverse: torri, piramidi, ecc. ecc.

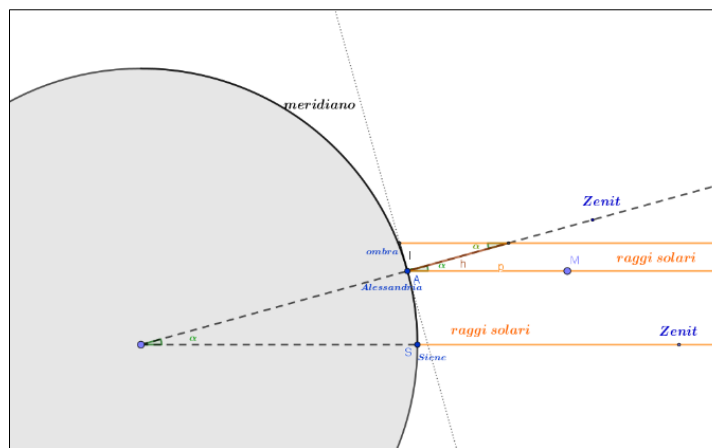
Se però ci chiediamo quanta porzione di superficie terrestre si osserva da altezze non trascurabili, ad esempio dalla Stazione Spaziale Internazionale, dobbiamo calcolare l'area della calotta sferica, ovvero di un **cerchio non euclideo**, i cui raggi sono gli archi di meridiano che congiungono il centro con il bordo (circonferenza del modello di Riemann=luogo dei punti equidistanti da una retta data).

Un problema analogo è stato già trattato su Matmedia : risoluzione di un [problema di maturità](#) anteriore alla riforma Gentile.

## Triangoli in terra e in cielo

### La misura del raggio terrestre nel III secolo a.C. Ricordiamo brevemente l'esperimento di Eratostene .

Quando il sole si trova esattamente allo Zenit a Siene (Assuan), a mezzogiorno, ad Alessandria i raggi arrivano formando un angolo  $\alpha < 90^\circ$  con la verticale del luogo. Si può misurare l'angolo  $\alpha$  usando l'ombra  $l'$  di un asse verticale, lo gnomone, di lunghezza  $l$  ( $\tan \alpha = \frac{l'}{l}$  ).



Con semplici considerazioni geometriche si arriva alla relazione  $\frac{2\pi R}{D} = \frac{360^\circ}{\alpha}$  dove  $D$  è la distanza tra le due città e  $R$  è il raggio terrestre.

Secondo Eratostene la lunghezza del meridiano era pari a 250000 stadi, corrispondenti a circa 40000 km. In corrispondenza si trova  $R \sim 6367 \text{ km}$  non molto lontano dal valore  $R \sim 6378 \text{ km}$  che si attribuisce attualmente al raggio equatoriale .

Dai triangoli sulla terra ai triangoli tracciati nel cielo il passo è relativamente breve.

I risultati dell'esperienza di Eratostene portarono a compimento i tentativi di misurare la distanza Terra- Luna, fino allora stimata solo in funzione del raggio terrestre .

Il metodo di Eratostene, come quelli degli altri grandi astronomi dell'età ellenistica, Aristarco di Samo e Ipparco di Nicea, suggeriscono alcuni spunti per la formulazione di alcuni quesiti che fanno da ponte tra Matematica e Astronomia .



## La distanza Terra-Luna

Due osservatori ,  $A$  e  $B$  , sono situati sullo stesso parallelo.  $A$  vede sorgere la luna sul proprio orizzonte mentre  $B$  la vede allo Zenit.

Come possono procedere per misurare la **distanza Terra-Luna**?

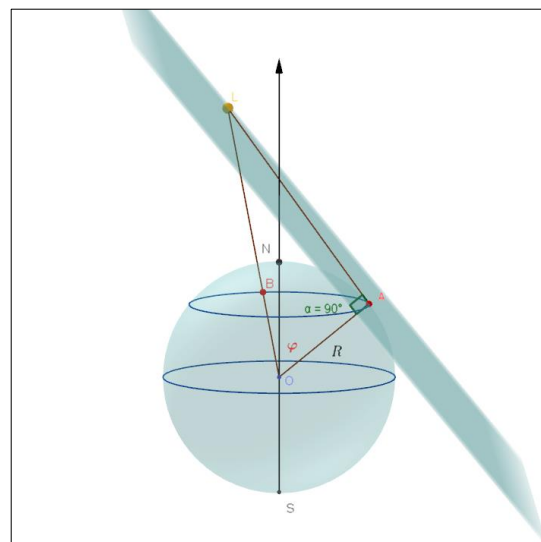
### Soluzione

La luna  $L$  si trova sulla verticale del luogo per l'osservatore  $B$  e sul piano tangente per l'osservatore  $A$ .

E' sufficiente risolvere il triangolo rettangolo  $OAL$  rappresentato in figura.

Il cateto  $OA$  è il raggio terrestre, l'ipotenusa  $OL$  è la distanza che si vuole misurare, l'angolo  $\varphi$  la differenza di longitudine tra i due luoghi.

$$\overline{OL} = \frac{R}{\cos \varphi}$$



## Una falce di Luna

Durante un' eclissi lunare risulta visibile una porzione di luna compresa tra due archi circonferenza . Ricostruire graficamente le due circonferenze rappresentative della luna e della terra



### Soluzione

La costruzione richiede l'applicazione della nota proprietà delle corde di un cerchio: l'asse di una corda dimezza gli archi corrispondenti e passa per il centro , come si evince dalla figura a lato in cui sono stati determinati i centri delle due circonferenze .

