1) Parabola passsante per tre punti.

La Fig.1 si riferisce ad una parabola con asse verticale *g* e di vertice V. Le corde sono tutte parallele alla retta *r*, di direzione fissata a piacere, mentre i punti medi L, M, N appartengono alla retta *s* che è parallela all'asse *g*.

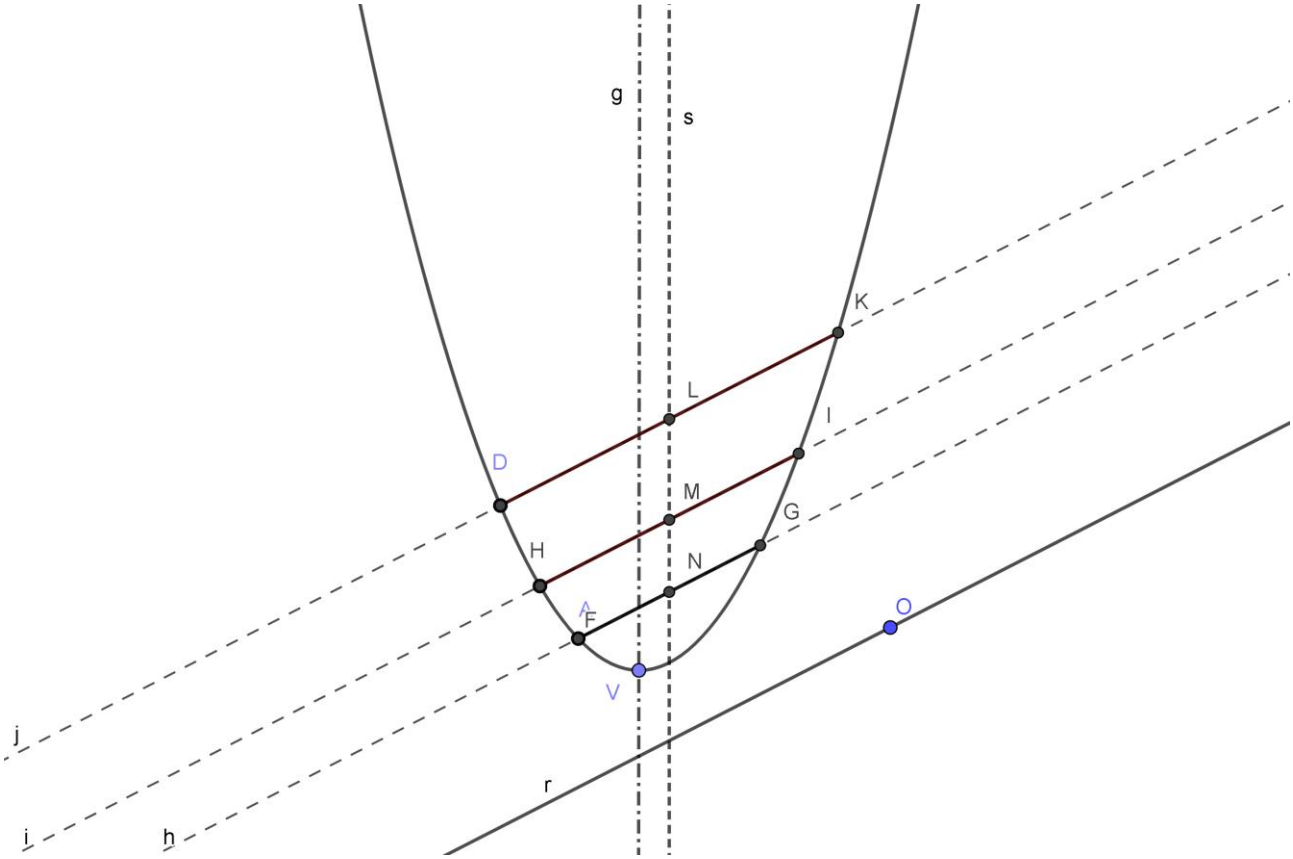


Fig.1

Ricordato che una conica non particolare, oppure in posizioni particolari, è determinata se si conoscono 5 parametri indipendenti nella sua equazione generale:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

come conseguenza, risulta che è necessario conoscere esattamente 5 punti distinti per tracciare una conica.

Supponiamo di voler disegnare una parabola passante per tre punti non allineati e con asse verticale.

Per sfruttare la macro costruzione di una conica per 5 punti, disponibile in GeoGebra, dobbiamo prima trovare la posizione di altri due punti che appartengono sicuramente alla stessa parabola.

La figura n.2 mostra come procedere per calcolare la posizione di un punto dove sicuramente passerà la parabola cercata(Web: Paolo Urbani,Geogebra-parabola 2). Sono dati i punti base A, B, C e per comodità disegnamo il triangolo di vertici ABC.

La retta DL indica la direzione verticale scelta, mentre la retta *g* è parallela alla retta DL e passa per il punto medio E, tra i punti A e B.

La parallela al lato AB, condotta per il vertice C, incontra la retta *g* nel punto H, centro della simmetria che consente di determinare il punto C', simmetrico del punto C.

In questa prima immagine, non è difficile notare le due corde parallele AB e CC' per i cui estremi passa la conica che stiamo cercando.

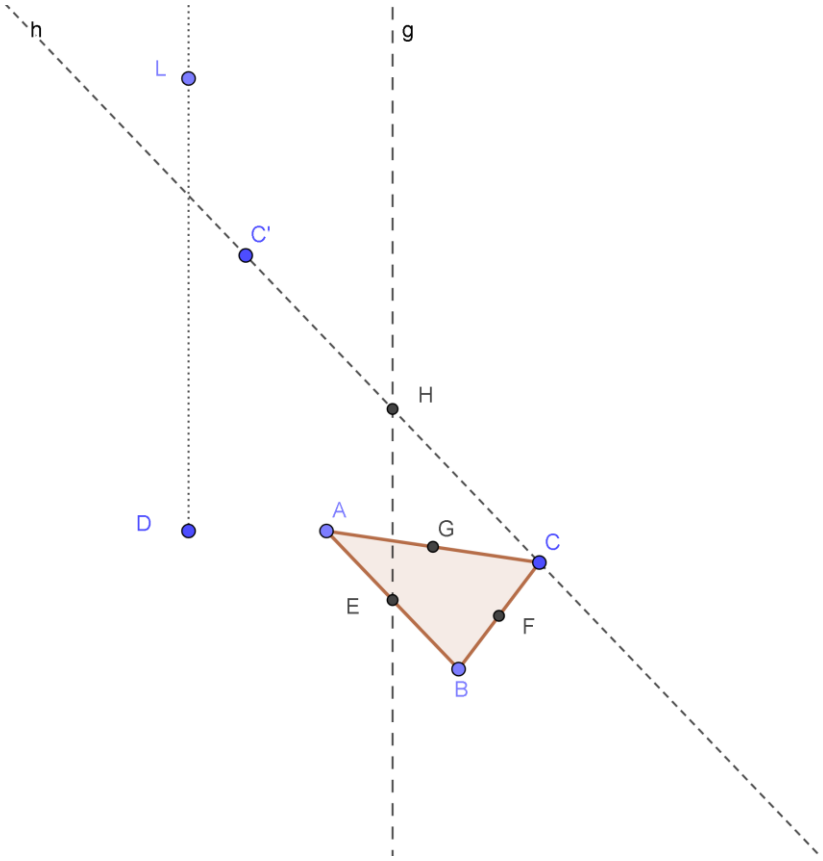


Fig.2

Determiniamo ora la posizione del secondo punto simmetrico, utilizzando lo stesso procedimento grafico.

Intersecando la parallela alla retta DL condotta per il medio F, con la parallela al lato BC, condotta per il punto A, troviamo prima il punto il punto R e quindi il simmetrico A' del punto A, Fig.3.

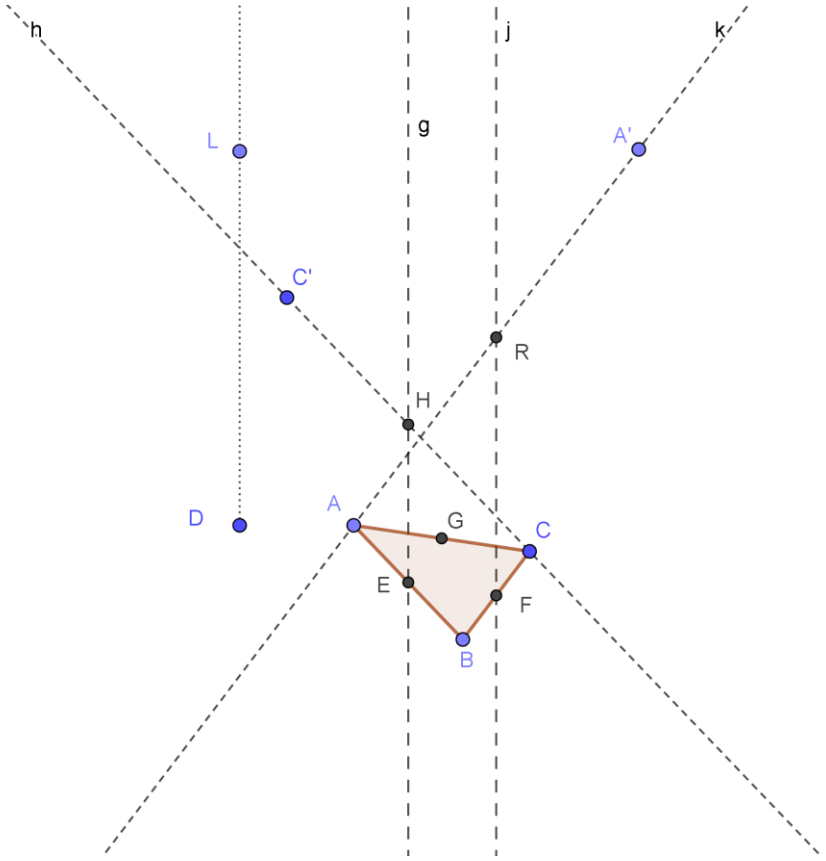


Fig.3

A questo punto, siamo in grado di disegnare il luogo cercato, utilizzando la macro costruzione disponibile in GeoGebra, Fig.4.

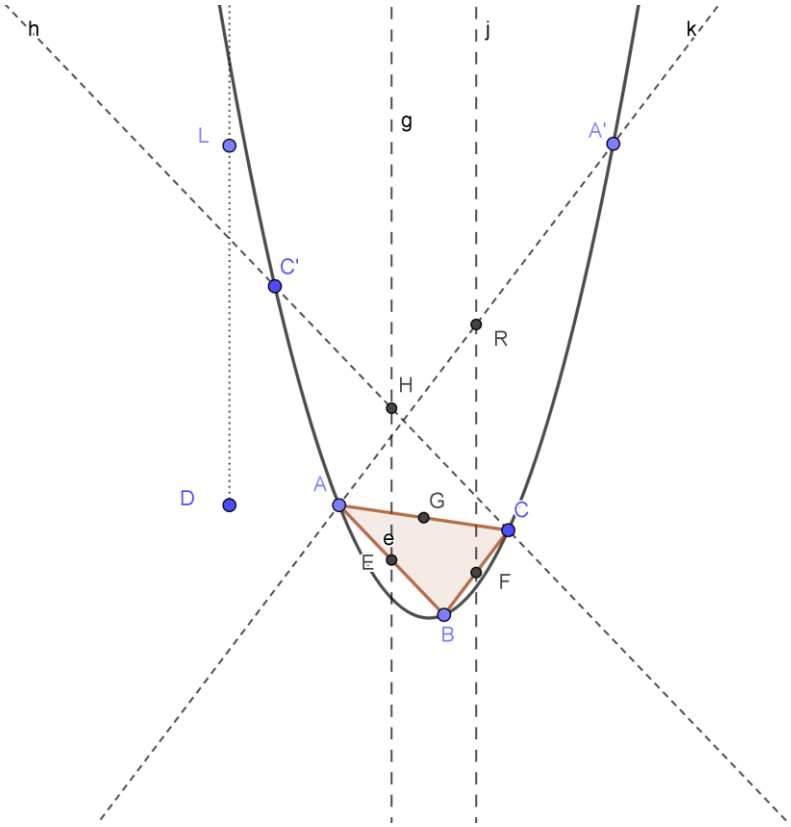


Fig.4

La figura sottostante rappresenta il luogo cercato.

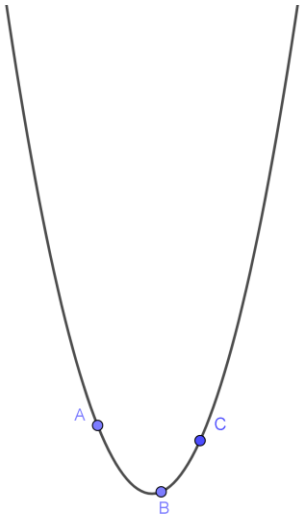


Fig.5

Ampliamenti.

Nel piano, considerata la parabola passsante per i punti C, D, E e la semiretta f di origine A che indica la direzione dell'asse, diamo un metodo per trovare gli elementi caratterizzanti la stessa parabola, Fig.6.

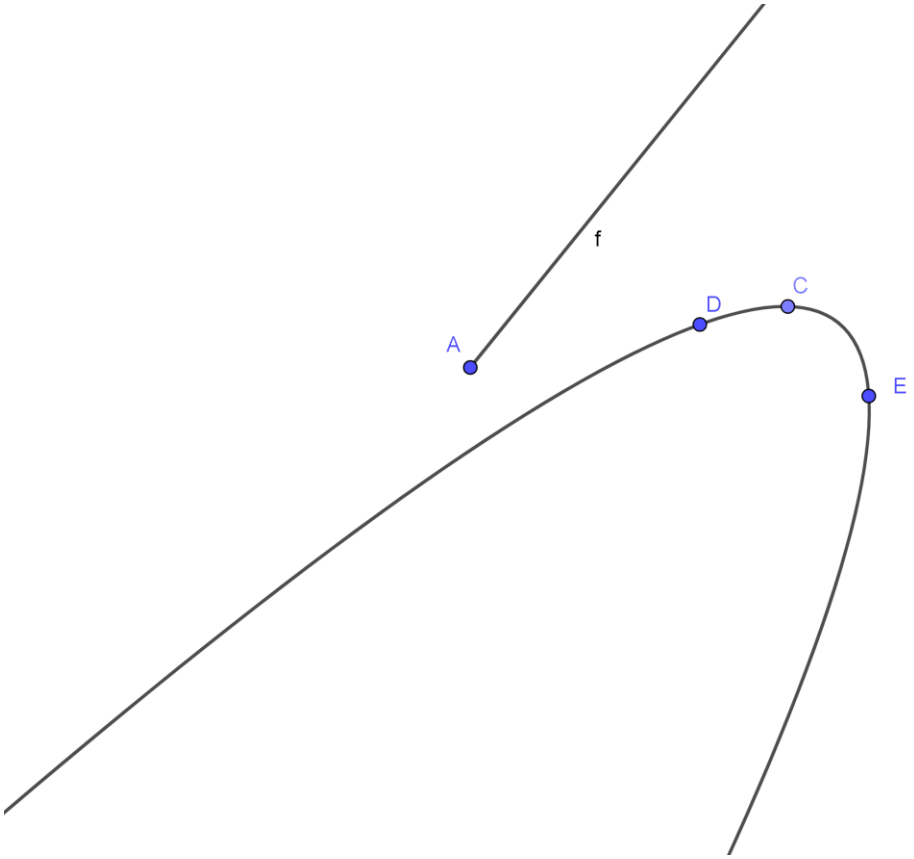


Fig.6

Per un punto qualunque della parabola conduciamo la perpendicolare alla retta f e sia S l'altro punto estremo della corda RS. Indicato con M il punto medio della corda RS, per lo stesso punto conduciamo la perpendicolare alla corda ed otteniamo l'asse della parabola che interseca la stesssa nel punto V , cioè nel suo vertice, Fig.7.

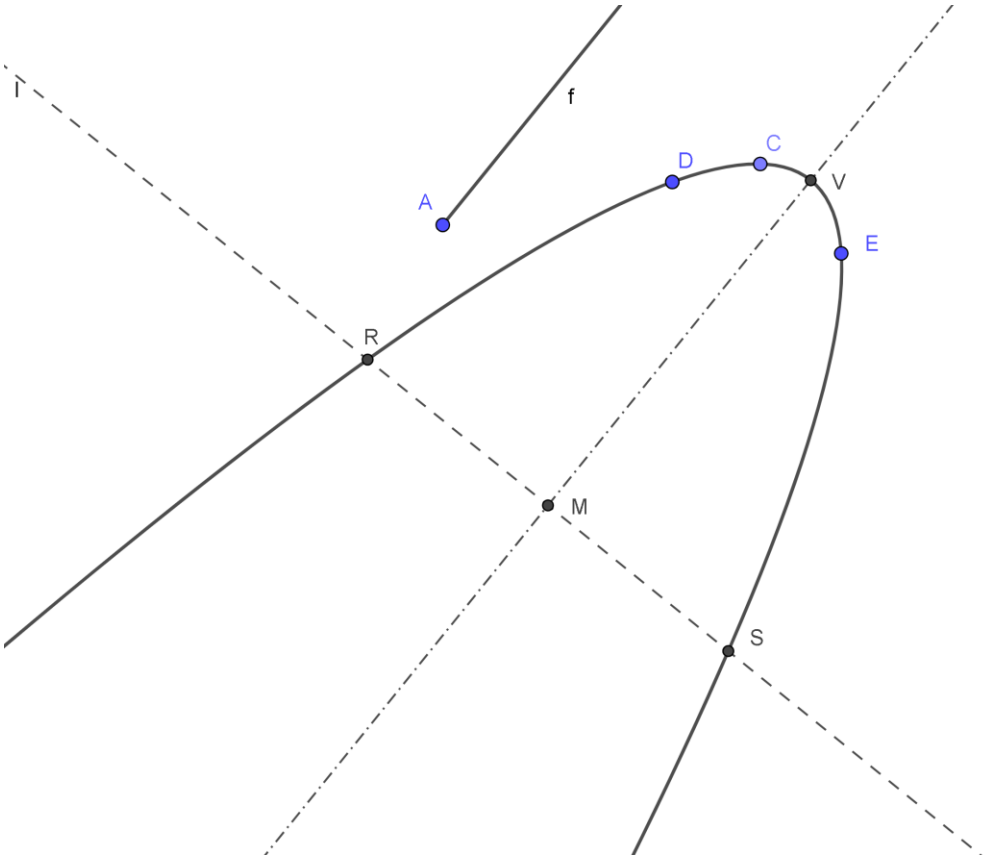
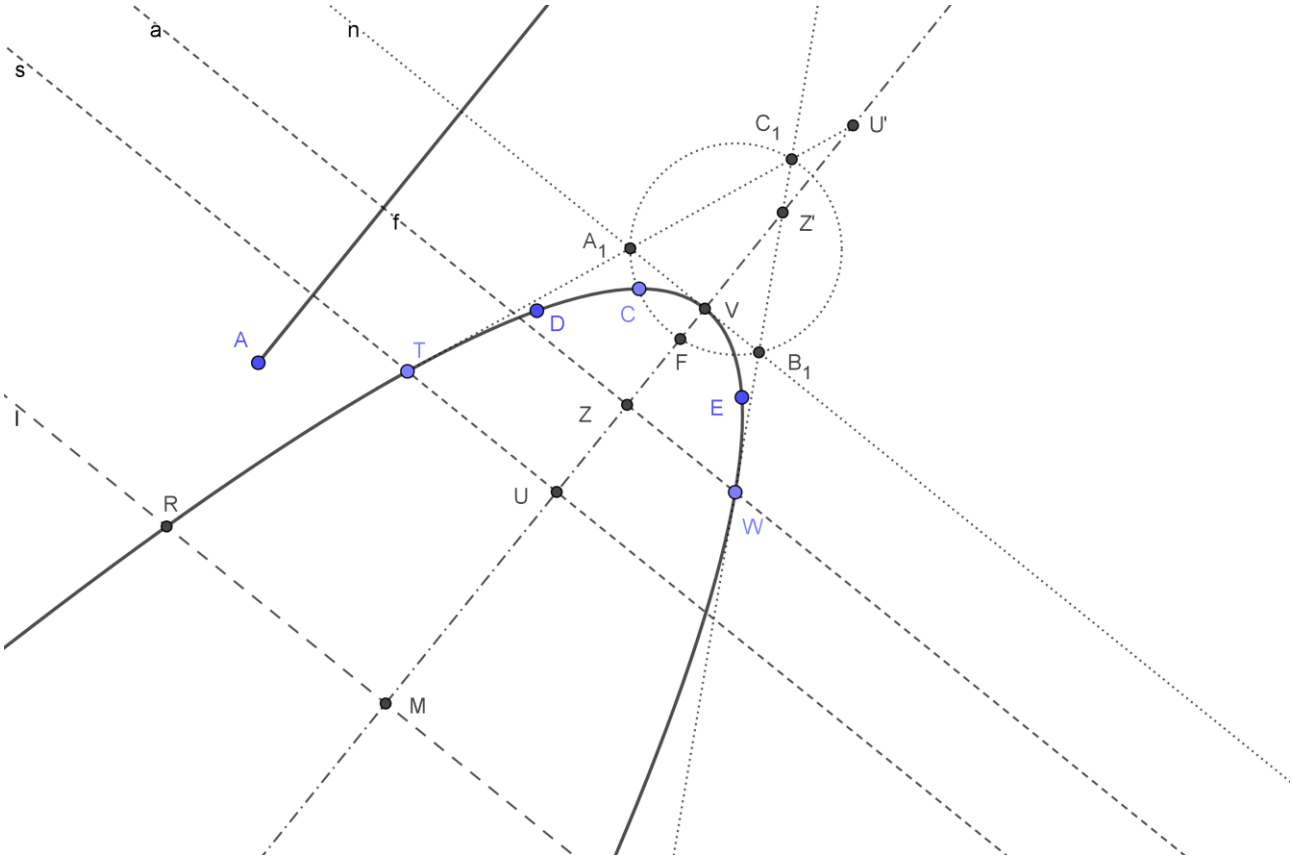


Fig.7

Successivamente, costruito il triangolo delle tangenti alla parabola, disegnamo la circonferenza ad esso circoscritta, che passa anche per il fuoco F della stessa parabola, Fig.8(Cfr. Teorema di J-H Lambert).

Il triangolo è quello di vertici $A_{1,}B_1, C_1$.

Per quanto riguarda la costruzione delle tngenti, quella condotta per V, non presenta alcuna difficoltà. La tangente TU' si ottiene congiungendo il punto T, sulla parabola, con U' simmetrico, rispetto al vertice V, del piede della perpendicolare per T all'asse della parabola. Cose analoghe per la tangente WZ'.



Fig, 8

La determinazione del lato retto e la proprietà caratteristica.

Smpre sullo stesso grafico, tracciato l'asse del segmento LV, sia K la sua intersezione con l'asse della parabola. La circonferenza di centro K , passsante per V ed L, intercetta l'asse della parabola nel punto T. Indicato con H il piede della perpendicolare all'asse per il vertice L, abbiamo che il segmento TH rappresenta il *Lato retto* della parabola. Osserviamo che anche il segmento GR rappresenta sempre il lato retto, per definizione. La circostanza è resa evidente dalle rette parallele all'asse, passanti per i punti R e G, e tangenti alla circonferenza di centro P.

Con riferimento al triangolo rettangolo VLT, possiamo verificare che vale la proprietà caratteristica della parabola tra l'ordinata e l'ascissa di un suo punto con, il lato retto Applicando il secondo Teorema di Euclide, possiamo scrivere:

$$LH^2 = TH * HV$$

cioè

$$y^2 = p * x.$$

Infine, possiamo vedere come le circonferenze di centro M ed F consentono di ritrovare la relazione:

$$p = 4f$$

tra il lato retto p e la focale f, Fig. 9.

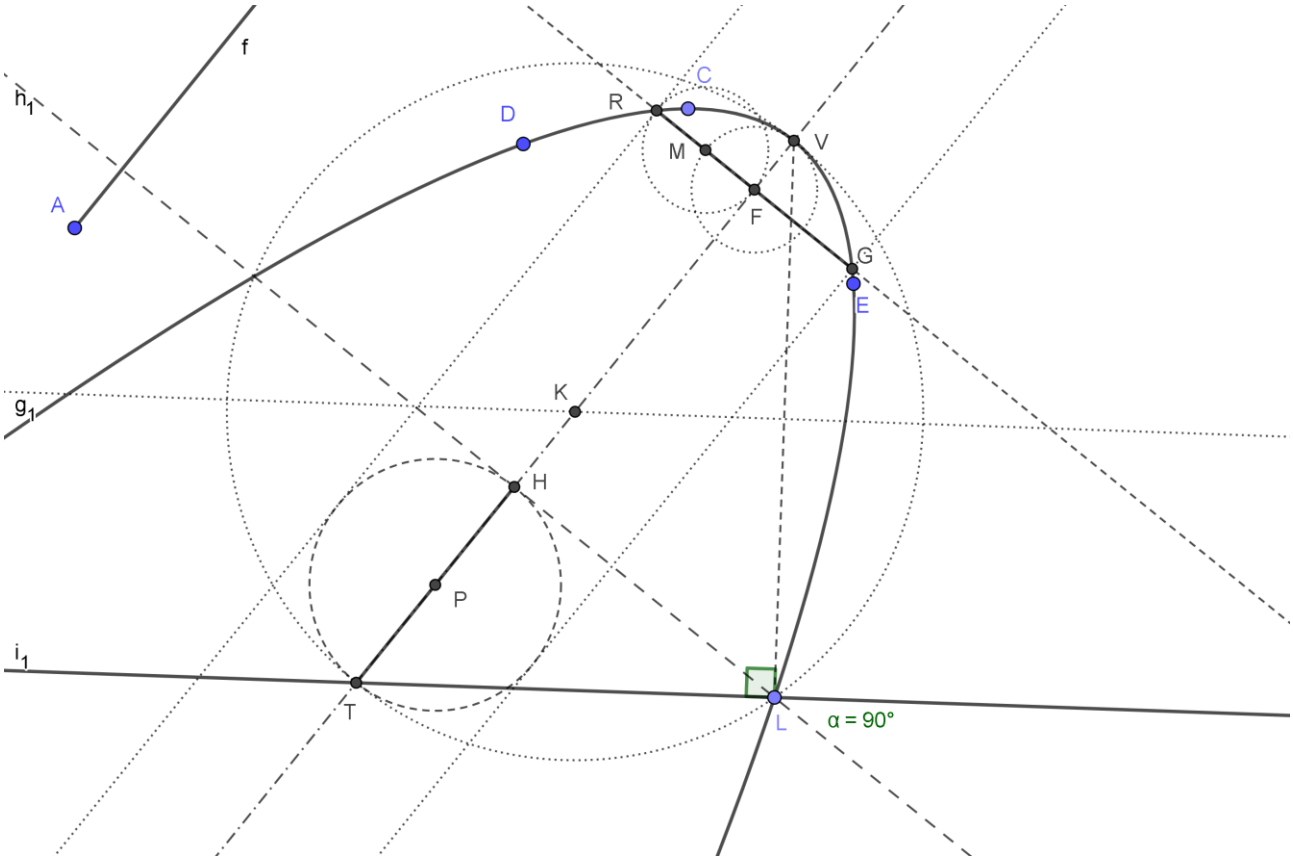


Fig.9

2) Risoluzione dell'esercizio.

Ricordiamo che il testo chiedeva di trovare l'equazione della parabola, con asse parallelo a quello delle ordinate e passante per i punti A(0;4), B(0;1), C(5;0).

Impostata l'equazione tipica:

$$y = ax^2 + bx + c$$

dobbiamo risolvere il sistema tra le equazioni:

$$c = 4; c = 1; 25a + 5b + c = 0$$

Ma questo sistema non ammette soluzioni, per cui possiamo affermare che non è possibile tracciare la parabola con le caratteristiche richieste.

Una risoluzione grafica.

Seguiamo allora una via grafica, anche al fine di rendere visibile le procedure ed i risultati che emegeranno. Allo scopo, proponiamo il Teorema:

Dati tre punti nel piano, non esiste la parabola con asse parallelo alla congiungente due di essi, e la conica risultante degenera in due rette parallele.

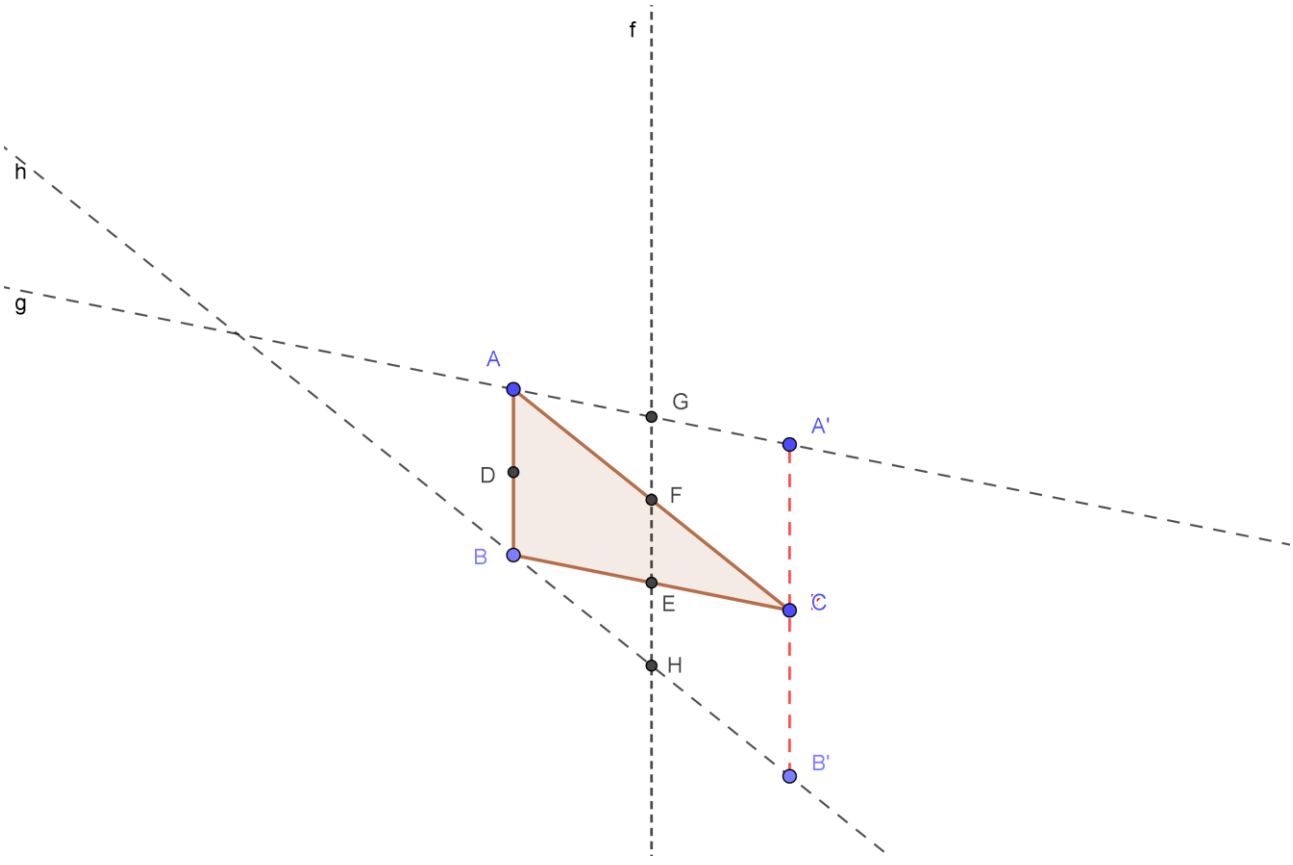


Fig. 10

Dimostrazione.

Con riferimento alla Fig. 10, costruito il triangolo di vertici ABC, siano D, E ed F i punti medi dei lati. Scelta la direzione del lato AB come riferimento, seguendo lo schema precedente, determiniamo i punti simmetrici dei vertici A e B.

La parallela ad AB per il punto medio E di BC, interseca la parallela al lato BC nel punto G. Il punto A' è il simmetrico di A rispetto a G.

In modo analogo, la parallela ad AB condotta dal punto F interseca la parallela ad AC per il punto B, nel punto H. Il punto B' è il simmetrico di B rispetto ad H.

I punti A, B, C e A', B' appartengono al luogo cercato.

Intanto, precisiamo che F è punto medio del lato AC, perché si trova sulla parallela al lato AB, condotta da E (corollario al Teorema di Talete, triangolo ABC).

Di seguito, osservando il triangolo ACA', possiamo dire che la congiungente i punti medi F e G risulta essere parallella al lato CA' (Teor. di Talete). Con analogo ragionamento sul triangolo CBB', possiamo concludere che EH è parallelo a CB'.

Da quanto detto sopra discende che il punto C è punto di *continuità* nel parallelismo tra i segmenti GF, FE, EH. Allora, il punto C appartiene alla retta per i punti A' e B'

Ma G è punto medio tra A e A' e H lo è tra B e B' per cui, applicando il Teorema di Talete, possiamo scrivere che:

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{BH}{HB'}$$

e, quindi anche $$\frac{AG+GA'}{AG} = \frac{BH+HB'}{BH}$$

cioè $$\frac{AA'}{AG} = \frac{BB'}{BH}$$

o, ancora $$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AG}{BH}$$

Questa relazione ci autorizza a dire che :

la retta A'B' è parallela alla retta AB.

Come conseguenza, abbiamo che i punti A', C e B' sono allineati.

Per essi non passa una parabola, ma è possibile tracciare una retta.

Anche i punti A e B possono essere collegati con una retta, per cui il luogo cercato è costituito da due rette parallele, Fig. 11.

.

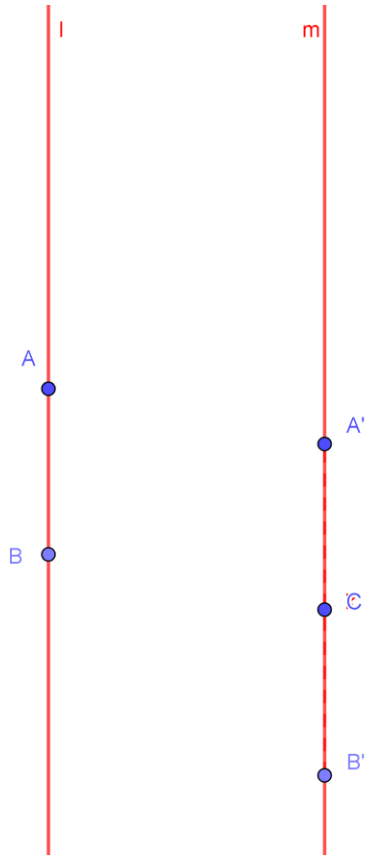


Fig.11

A Chi legge, l'augurio di trovare qualche motivo di interesse, con la speranza che questo lavoro possa essere la base per futuri sviluppi.

ADM, 21/11/2024.