

Quesito 3- straordinaria 2014 Ordinamento

Data una statua AB di altezza $h = 2,5 \text{ m}$, posta su di un piedistallo BP di altezza $a = 2 \text{ m}$, si determini sul piano orizzontale passante per il punto P d'appoggio del piedistallo un punto O tale che da esso la statua sia vista sotto angolo massimo.

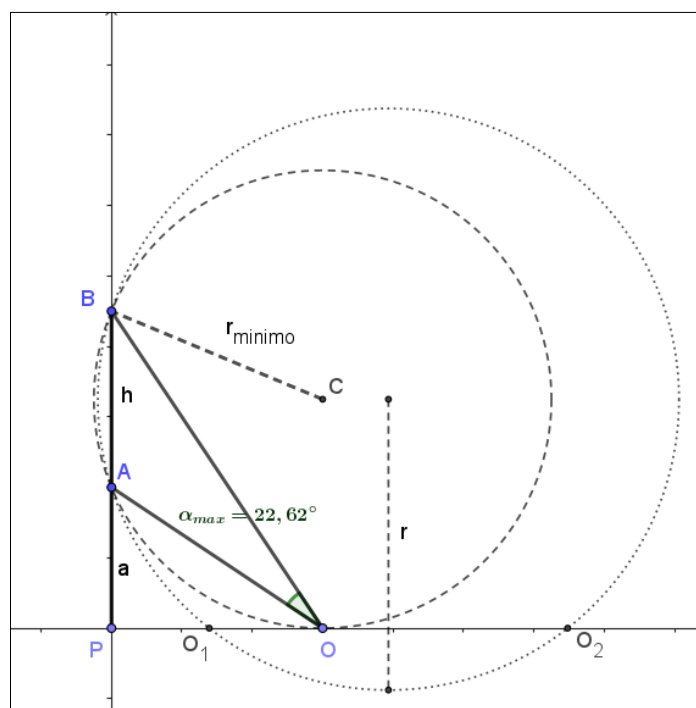
Soluzione

Si tratta di un problema classico, noto come Problema di Regiomontano, astronomo e matematico tedesco (1436-1476).

Se il piede della statua supera l'altezza dell'occhio dell'osservatore di una lunghezza a e l'estremo più alto della statua la supera di una lunghezza b , l'angolo di visione massima si avrà quando lo spettatore si situerà ad una distanza dal piedistallo pari alla media geometrica di a e $b = \sqrt{ab}$.

Nel nostro caso si ottiene $(\sqrt{2 \cdot 4.5}) = 3 \text{ m}$

Soluzione geometrica



Con riferimento alla figura, il segmento AB rappresenta la statua, P è il piede del piedistallo, PO una retta del piano orizzontale passante per P su cui si trova l'osservatore O . Sia $\widehat{BOA} = \alpha$.

Il luogo geometrico dei punti che vedono il segmento AB entro un angolo di ampiezza α è un arco di circonferenza di estremi A e B e raggio r tale che

$\overline{AB} = 2r \sin \alpha$ (**Teorema della corda**). Nel nostro caso il centro della circonferenza deve appartenere allo stesso semipiano che contiene O

Il minimo valore di r per cui la circonferenza incontra la retta PO è quello che corrisponde r_{minimo} , raggio della circonferenza tangente alla retta PO .

Se $r > r_{\text{minimo}}$ la circonferenza è secante e incontra la retta PO in due punti ai quali corrispondono angoli visuali di ampiezza minore (come si può verificare graficamente), essendo r e $\sin \alpha$ tra loro inversamente proporzionali.

Il punto O da cui la statua è vista sotto angolo massimo è quindi il punto di tangenza che, per il teorema della tangente e della secante, si trova ad una distanza $\overline{PO} = \sqrt{\overline{PB} \cdot \overline{PA}} = (\sqrt{2 \cdot 4.5}) = 3 \text{ m}$

Soluzione analitica

Posto $\overline{PO} = x > 0$, esprimiamo in funzione di x il valore di $\tan \alpha$

$$\tan \alpha = \tan(\widehat{AOP} - \widehat{BOP}) = \frac{\tan \widehat{BOP} - \tan \widehat{AOP}}{1 + \tan \widehat{AOP} \cdot \tan \widehat{BOP}}$$

Essendo $\tan \widehat{BOP} = \frac{9/2}{x}$ $\tan \widehat{AOP} = \frac{2}{x}$

$$\tan \alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{9}{x^2}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + 9} \quad \text{con } x > 0$$

La funzione $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$ ammette un massimo, nell'intervallo $x > 0$, per $x = 3$

Infatti, la sua derivata $f'(x) = \frac{9 - x^2}{(x^2 + 9)^2}$ è positiva per $0 < x < 3$, è negativa per $x > 3$.

L'angolo di visione massima è $\alpha_{\text{max}} = \frac{5}{2} f(3) = \tan^{-1} \frac{5}{12} \approx 22,62^\circ$

Quesito 2- straordinaria 2014 PNI

Sia $\overline{AB} = 2,5 \text{ m}$ l'altezza di una statua e $\overline{BP} = 2 \text{ m}$ l'altezza del piedistallo su cui essa poggia. Si determini sul piano orizzontale per il punto P d'appoggio del piedistallo il luogo dei punti tali che da essi la statua sia vista sotto angolo massimo

Dal risultato della soluzione del precedente quesito si evince che, per ottenere l'angolo di visione massima, l'osservatore O si deve trovare alla distanza di 3m da punto P .

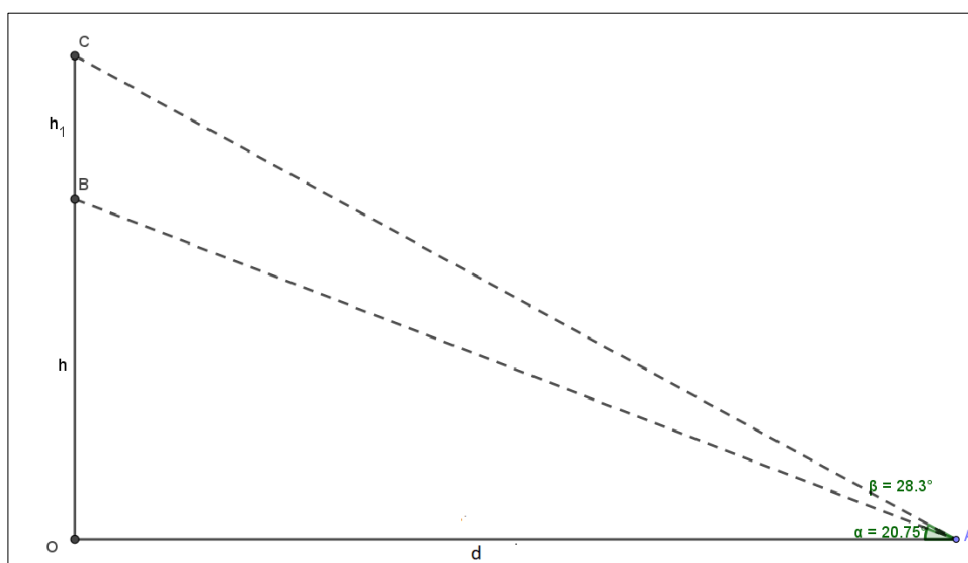
Pertanto , il luogo dei punti del piano orizzontale passante per P tali che da essi la statua sia vista sotto angolo massimo è la circonferenza di centro P e raggio di lunghezza 3m , appartenente al piano stesso

Quesito 7 -straordinaria 2009 PNI

Una statua alta 70 m viene sistemata su una collina di altezza h . Da un certo punto A, situato a livello del suolo, gli angoli di elevazione per la base B e la cima C della statua misurano rispettivamente $20,75^\circ$ e $28,30^\circ$. Si determini l'altezza h .

Anche questo quesito può essere collegato al problema al problema di Regiomontano se si aggiunge la richiesta : ***il punto A corrisponde a una posizione in cui la statua sia vista sotto angolo massimo?***

Soluzione



Siano $\alpha = 20,75^\circ$ e $\beta = 28,30^\circ$ le ampiezze degli angoli $O\hat{A}B$ e $O\hat{A}C$, rispettivamente.

Siano $h_1 = 70\text{ m}$, h, d le lunghezze dei segmenti BC, OB, OA rispettivamente

Essendo

$$\overline{OC} = \overline{OA} \tan \beta ; \quad \overline{OB} = \overline{OA} \tan \alpha ; \quad \overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$$

$$\text{si ottiene ; } h_1 = d(\tan \beta - \tan \alpha) \rightarrow d = \frac{h_1}{\tan \beta - \tan \alpha}$$

$$\text{Pertanto, } \overline{OB} = h = d \tan \alpha = h_1 \frac{\tan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \approx 166,2\text{ m}$$

Per rispondere alla seconda richiesta ricordiamo che la soluzione del problema di Regiomontano prevede che *il luogo dei punti del piano orizzontale passante per O tali che da essi la statua sia vista sotto angolo massimo è la circonferenza di centro O e raggio di lunghezza $\sqrt{h(h + h_1)}$*

Poiché $d = \frac{h_1}{\tan \beta - \tan \alpha} \approx 438,6 \text{ m}$, mentre $\sqrt{h(h + h_1)} \approx 198 \text{ m}$

il punto A non corrisponde a una posizione in cui la statua sia vista sotto angolo massimo, come si può verificare graficamente.

