

Sessione ordinaria 1992 PNI

PROBLEMA 2

In un piano cartesiano ortogonale si indichino con x e y le coordinate di un punto P e con X e Y le coordinate di un punto P' .

Si consideri la trasformazione di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = a'x + b'y \end{cases}$$

tale che al punto A di coordinate $x = 1, y = 1$ corrisponda il punto A' di coordinate $X = 0, Y = 2$ e al punto B di coordinate $x = 1, y = 0$ corrisponda il punto B' di coordinate $X = 1, Y = 0$.

Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi.

Detto α l'angolo acuto formato dalla retta r di equazione $y = mx$ e dalla sua trasformata r' , si studi come varia la tangente trigonometrica di α al variare della retta r , determinando in particolare il massimo relativo ed il massimo assoluto di $\tan \alpha$.

Soluzione

➤ Per determinare i 4 parametri della trasformazione, si impone

$$\begin{cases} 0 = a + b \\ 2 = a' + b' \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = a \\ 0 = a' \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ a' + b' = 2 \\ a = 1 \\ a' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ a' = 0 \\ b' = 2 \end{cases}$$

➤ Il determinante della trasformazione $T \begin{cases} X = x - y \\ Y = 2y \end{cases}$ è $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$

Si tratta, pertanto di un'affinità diretta. Non è una simmetria, né una similitudine.

Punti uniti

Nelle equazioni della trasformazione T si sostituiscono le coordinate dei punti corrispondenti, e si impone che il punto 2 di "arrivo" coincida con il punto "di partenza"

$$\begin{cases} x = x - y \\ y = 2y \end{cases} \rightarrow y = 0$$

La retta $y = 0$ è il luogo dei punti uniti

Rette unite

Nell'equazione di una retta generica si sostituisce a x e ad y le rispettive espressioni in funzione di X e Y , presenti nelle equazioni della trasformazione inversa

$$T^{-1} \begin{cases} x = X + \frac{1}{2}Y \\ y = \frac{1}{2}Y \end{cases}$$

e si impone che la retta di partenza coincida con la sua trasformata.

Le rette di equazione $x = k$ non si trasformano in sé stesse, bensì nelle rette $X + \frac{1}{2}Y = k$

Per le rette non parallele all'asse y si ha

$$y = mx + q \rightarrow \frac{1}{2}Y = mX + \frac{1}{2}mY + q \rightarrow Y = \frac{2m}{1-m}x + \frac{2q}{1-m} \quad \text{con } m \neq 1$$

$$\begin{cases} \frac{2m}{1-m} = m \\ \frac{2q}{1-m} = q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m(m+1) = 0 \\ q(m+1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ q = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} m = -1 \\ \forall q \end{cases}$$

La prima soluzione corrisponde alla retta $y = 0$ trovata precedentemente, la seconda al fascio improprio $y = -x + q$

$$\text{Se } m = 1 \quad y = x + q \rightarrow \frac{1}{2}Y = X + \frac{1}{2}Y + q \rightarrow X = -q$$

Rette unite :

- la retta di equazione $y = 0$ è puntualmente unita
- le rette del fascio $y = -x + q$ sono globalmente unite

➤ Detto α l'angolo acuto formato dalla retta r di equazione $y = mx$ e dalla sua trasformata r' , di equazione $Y = m'X = \frac{2m}{1-m}x$, risulta

$$\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{m - \frac{2m}{1-m}}{1 + \frac{2m^2}{1-m}} \right| = \left| \frac{-m - m^2}{1 - m + 2m^2} \right| = \left| \frac{m + m^2}{1 - m + 2m^2} \right| \quad \forall m \neq 1$$

Consideriamo $f(m) = \left| \frac{m+m^2}{1-m+2m^2} \right|$ definita in $\mathbb{R}$ in quanto è prolungabile in modo continuo nel punto $(1, 1)$

Nella frazione $\frac{m+m^2}{1-m+2m^2}$ il denominatore è positivo $\forall m$, mentre il numeratore è positivo in $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ e negativo in $]-1, 0[$

Pertanto,

$$f(m) = \left| \frac{m+m^2}{1-m+2m^2} \right| = \begin{cases} \frac{m+m^2}{1-m+2m^2} > 0 & m < -1 \cup m > 0 \\ 0 & m = -1 \cup m = 0 \\ -\frac{m+m^2}{1-m+2m^2} > 0 & -1 < m < 0 \end{cases} \quad \text{essendo } 1 - m + 2m^2 > 0$$

Si consideri la funzione $g(m) = \frac{m+m^2}{1-m+2m^2}$, definita in $\mathbb{R}$ che coincide con $f(m)$

in $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ e coincide con $-f(m)$ in $]-1, 0[$

La funzione $g(m)$ ha come **asintoto orizzontale** la retta $y = \frac{1}{2}$ in quanto

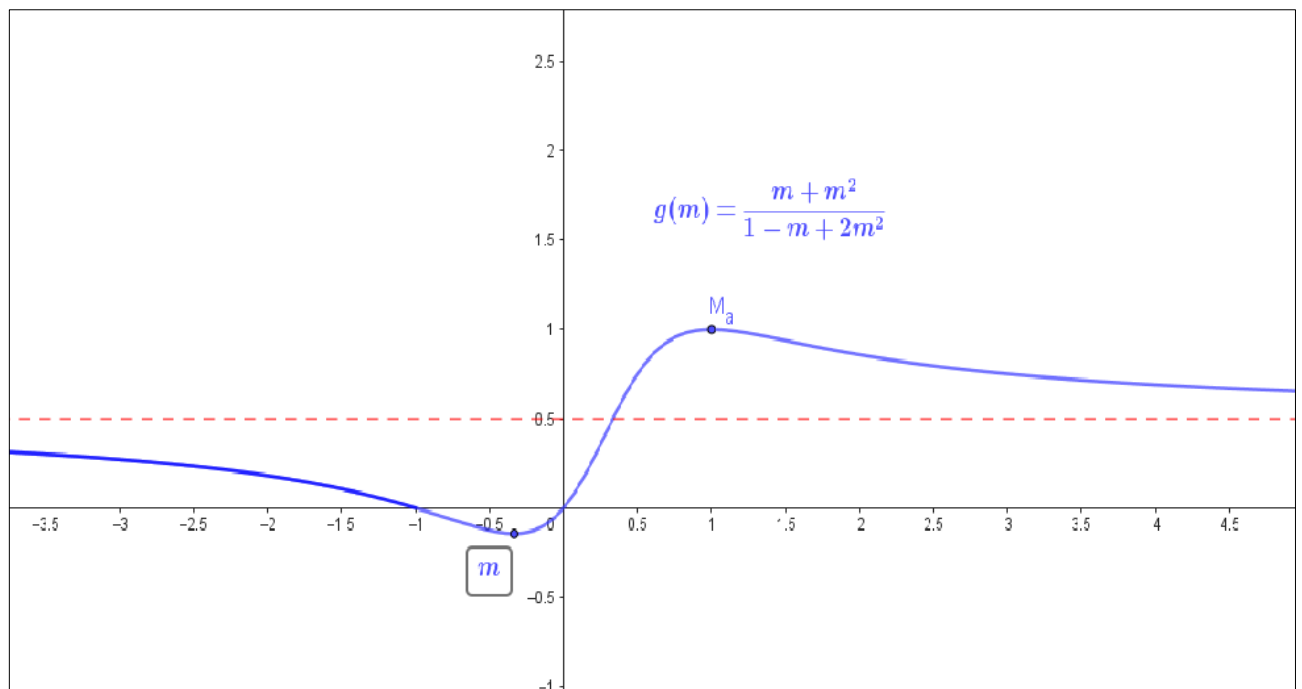
$$\lim_{m \rightarrow -\infty} \frac{m + m^2}{1 - m + 2m^2} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m + m^2}{1 - m + 2m^2} = \frac{1}{2}$$

Monotonia di $g(m)$

$$g'(m) = \frac{(2m+1)(1-m+2m^2)-(m+m^2)(4m-1)}{(1-m+2m^2)^2} = \frac{-3m^2+2m+1}{(1-m+2m^2)^2} = 0 \text{ per } m = -\frac{1}{3} \cup m = 1$$

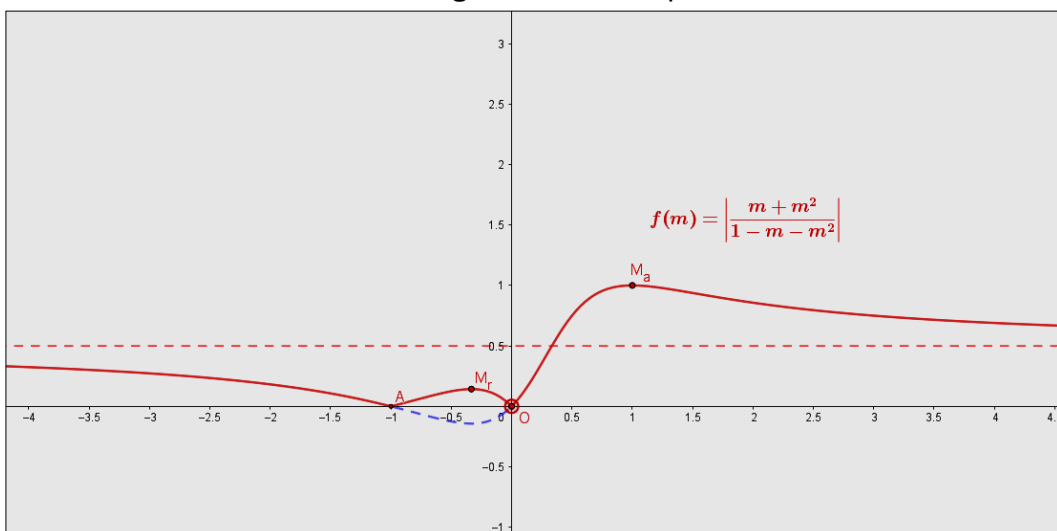
Inoltre

$m < -\frac{1}{3}$	$g'(m) < 0 \rightarrow g(m) \text{ è decrescente}$
$-\frac{1}{3} < m < 1$	$g'(m) > 0 \rightarrow g(m) \text{ è crescente}$
$m > 1$	$g'(m) < 0 \rightarrow g(m) \text{ è decrescente}$



La funzione $g(m)$ ha un minimo relativo e assoluto in $m(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7})$ e un massimo relativo e assoluto in $M_a(1,1)$

Il grafico della funzione $f(m)$ si ottiene da quello di $g(m)$ ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, l'arco di curva che giace nel terzo quadrante



La funzione è continua ma non derivabile nei punti $A(-1,0)$ e $O(0,0)$ (punti angolosi)

Il punto $M_r\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\right)$ è **massimo relativo**, il punto $M_a(1,1)$ è **massimo relativo e assoluto**.

I punti O e A sono **minimi relativi e assoluti**.

Il valore di $\tan \alpha$ è nullo in corrispondenza delle due rette unite $y = 0$ e $y = -x$,

è massimo in corrispondenza della retta $y = x$, la quale si trasforma nella retta

$$X = 0 \left(\alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \tan \alpha = 1 \right).$$

OSSERVAZIONE

I grafici delle funzioni sono stati elaborati mediante Geogebra.

Il testo non chiede esplicitamente il grafico della funzione che rappresenta “**come varia la tangente trigonometrica di α al variare della retta r** ”.

Per rispondere alla richiesta, pertanto, è sufficiente studiare la monotonia della funzione.

Per studiarne la convessità e determinare gli eventuali flessi, è necessario lo studio della derivata seconda che porta a un'equazione di terzo grado non risolubile elementarmente.

Si ricorre, pertanto, all'ausilio di opportuni software.