Quesito 10- ordinaria 2005-PNI

Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Soluzione

Concetto di media aritmetica e sue proprietà

Indicato con N il numero totale degli abitanti del Paese, sappiamo che il numero "$giovani$" è uguale a $0{,}6 \cdot N$ e quello degli "$anziani$" è $0{,}4 \cdot N$.

L'età media è

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$ dove x_i è il valore dell'età dell' $i - simo$ abitante.

La somma che compare al numeratore può essere espressa con due soli addendi

- N_x ,somma dei valori minori di 60
- N_y, somma dei valori maggiori o uguali a 60

Per la proprietà caratteristica della media aritmetica (definizione di Chisini)

- $\boldsymbol{N_x = 0{,}6 \cdot N \cdot M_x}$ $dove\ M_x$ è l'età media dei "$giovani$" con $\boldsymbol{0 < M_x < 60}$
- $\boldsymbol{N_y = 0{,}4 \cdot N \cdot M_y}$ $dove\ M_y$ l'età media degli "$anziani$" con $\boldsymbol{M_y \geq 60}$

Pertanto,

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{0{,}6 \cdot N \cdot M_x + 0{,}4 \cdot N \cdot M_y}{N} = \boldsymbol{0{,}6 \cdot M_x + 0{,}4 \cdot M_y = M} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{3 \cdot M_x + 2\, M_y = 5M}$$

Discussione del risultato $\boldsymbol{M = 30}$

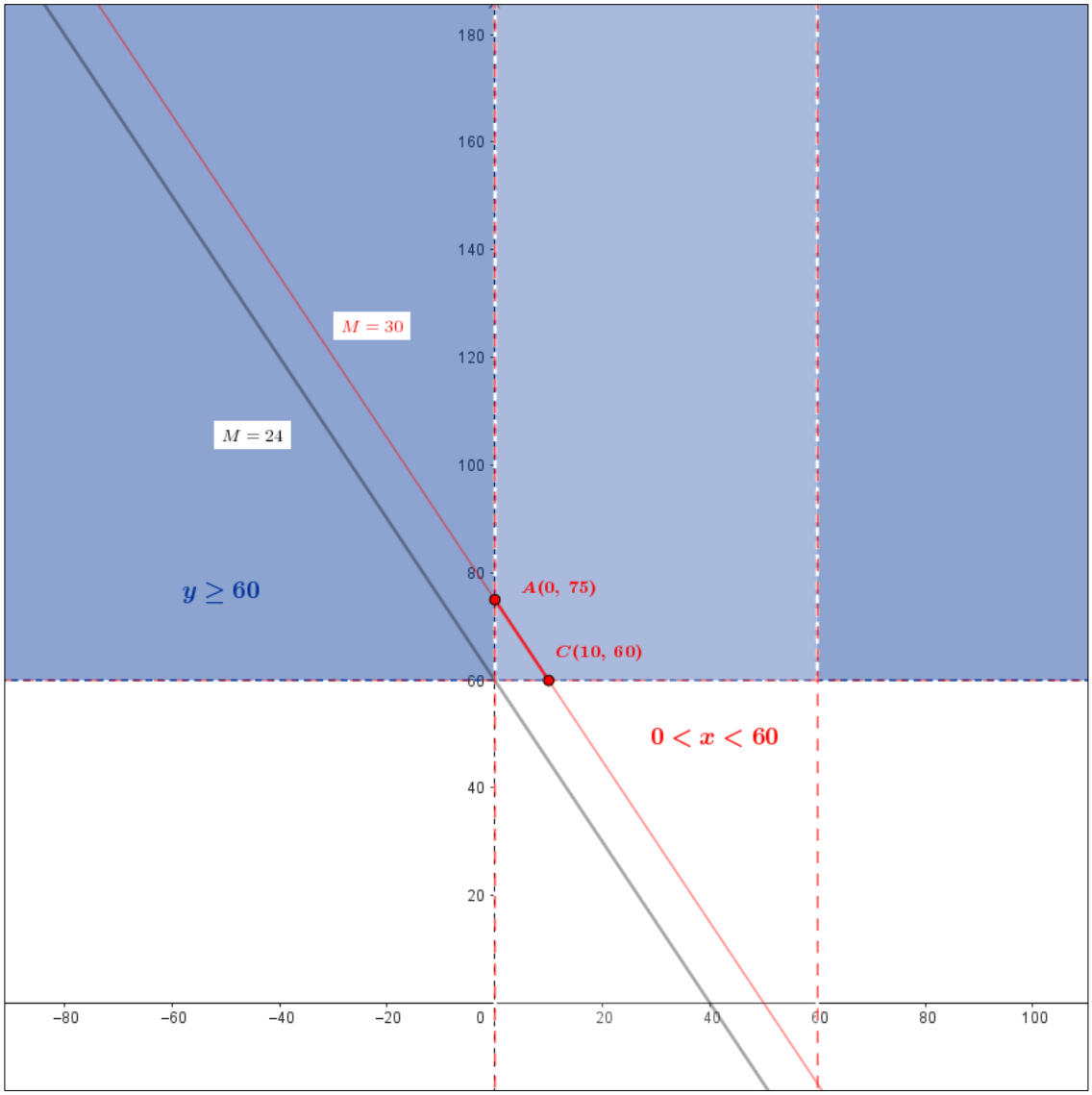
Posto $M_x = x$ e $M_y = y$, l'equazione $3x + 2y = 5M$ rappresenta, in un opportuno riferimento cartesiano, un fascio di rette. Tenuto conto dei vincoli

$$\boldsymbol{0 < x < 60} \ \cap \ \boldsymbol{y \geq 60}$$

possiamo procedere con una discussione grafica dei valori accettabili al variare parametro M.

I punti di coordinate (x, y) accettabili devono appartenere alla retta e alla regione di piano ∑ costituita dall'intersezione della striscia compresa tra le rette parallele

$x = 0\ e\ x = 60$ e il semipiano $y \geq 60$.



La "retta -limite" del fascio passa per il punto di coordinate (0,60) e corrisponde al valore $M = 24$

La retta di equazione $3x + 2y = 150$, corrispondente al valore $M = 30$, ha in comune con ∑ il segmento AC di coordinate $A(0,75)$ e $C(10,60)$.

Pertanto, la media della popolazione può essere uguale a 30, <u>purché risulti</u>

$\mathbf{0 < M_x \leq 10}$ età media dei "*giovani*" $\mathbf{60 \leq M_y \leq 75}$ età media degli "*anziani*"

La popolazione risulterebbe costituita per il 60% da bambini di età media inferiore a 10 anni e per il 40% da adulti di età media compresa tra 60 e 75 anni.

Il risultato è compatibile con il modello matematico utilizzato ma poco realistico.

In assenza di ulteriori informazioni ed essendo , del resto , la richiesta piuttosto generica, non è possibile aggiungere altro alla soluzione.