Quesito 8 Sessione ordinaria 2012- PNI

Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

Soluzione

Indichiamo con A l'evento $\{il\ pezzo\ proviene\ dallo\ stabilimento\ A\}$ e con B e C gli altri eventi analoghi. Le rispettive probabilità sono

$P(A) = \frac{1}{2} = 50\%$ $\quad P(B) = \frac{1}{3} \approx 33\%$ $\quad P(C) = \frac{1}{6} \approx 17\%$

Inoltre: $P(D \setminus A) = \frac{1}{10}$ $\quad P(D \setminus B) = \frac{7}{100}$; $\quad P(D \setminus C) = \frac{5}{100} \rightarrow$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap B) = \mathbf{\frac{49}{600}} \approx \mathbf{8\%}$$

Si deve determinare $P(A \setminus D)$.

La risposta al quesito può essere suggerita da un'opportuna tabella a doppia entrata .

Si indica co N il numero totale dei pezzi prodotti

	A	B	C	$Margine$
$\boldsymbol{D}$	$\mathbf{\frac{1}{20}N}$	$\mathbf{\frac{7}{300}N}$	$\mathbf{\frac{5}{600}N}$	$\mathbf{\frac{49}{600}N}$
$\overline{D}$	$\frac{9}{20}N$	$\frac{93}{300}N$	$\frac{95}{600}N$	$\frac{551}{600}N$
$Margine$	$\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{3}N$	$\frac{1}{6}N$	N

$$P(A \setminus D) = \frac{\frac{1}{20}N}{\frac{49}{600}N} = \frac{30}{49} \approx 61\%$$

Approfondimento . Interpretazione alla luce del Teorema di Bayes

La formula di Bayes permette di quantificare la probabilità che un dato evento E si verifichi sotto una determinata ipotesi H_i ovvero che un certo effetto abbia alla sua origine una determinata causa .

Siano $H_1 H_2 H_3 \ldots\ldots\ldots\ldots H_n$ n ipotesi o cause .

La probabilità $P(H_i)$ è la probabilità a priori dell'ipotesi (o causa) H_i.

*La probabilità $P(E \mid H_i)$ è **la verosimiglianza**, ovvero la misura di quanto E è verosimile, alla luce dell'ipotesi H_i (o di quanto facilmente la causa H_i possa produrre l'evento E).*

La probabilità $\boldsymbol{P(E)=\sum_i^n(P(H_i)P(E\mid H_i)}$ *è la* ***probabilità totale****, cioè la probabilità che l'evento* E *si verifichi tenendo conto di tutte le possibili cause.*

Il ragionamento inverso (base del ragionamento induttivo) è: ***rilevo*** *la presenza dell'****effetto*** E *e mi interrogo sulla causa che lo ha provocato.*

La probabilità $P(H_i\mid E)$*, probabilitità finale, o a posteriori, è, pertanto, la probabilità di* H_i ***riaggiornata*** *alla luce del fatto che l'evento E si è verificato .*

$$\boldsymbol{P(H_i\mid E)=\frac{P(E\cap H_i)}{P(E)}=\frac{P(H_i)\cdot P(E|H_i)}{\sum_i^n(P(H_i)P(E|H_i)}}$$ ***Formula di Bayes***

Il risultato $P(A\setminus D)>P(A)$ *può essere così interpretato:*

scelto casualmente un pezzo, prima di verificare se sia o no difettoso, la probabilità che provenga

dallo stabilimento A *è* $P(A)=\frac{1}{2}$ *=50%.*

Avendo verificato che il pezzo è difettoso, la probabilità che provenga dallo stabilimento A *è*

$$\boldsymbol{P(A\setminus D)=\frac{P(A)\cdot P(D\setminus A)}{P(D)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{600}{49}=\frac{30}{49}\approx 61\%}$$

Calcoliamo, a titolo di confronto la probabilità delle altre due ipotesi

$$\boldsymbol{P(B\setminus D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{P(B)\cdot P(D\setminus B)}{P(D)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{100}\cdot\frac{600}{49}=\frac{2}{7}\approx 29\%}$$

$$\boldsymbol{P(C\setminus D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(C)\cdot P(D\setminus C)}{P(D)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{100}\cdot\frac{600}{49}=\frac{5}{49}\approx 10\%}$$

La somma $\frac{30}{49}+\frac{2}{7}+\frac{5}{49}=\frac{49}{49}=1$ come era lecito aspettarsi.

Come si può osservare, applicando la formula di Bayes alle 3 ipotesi, il denominatore non cambia mentre il numeratore corrisponde al prodotto della **probabilità di ciascuna ipotesi** per la corrispondente **verosimiglianza**, da cui, pertanto**, dipende la probabilità delle cause, allorquando si è verificato l'effetto**.