

Quesito 10.ordinaria 2013 PNI

Si stabilisca per quali valori $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0; 3]$. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

Soluzione

La funzione $f(x) = x^2(3 - x)$ è continua in $\mathbb{R}$ e, in particolare, in $[0; 3]$.

Si annulla per $x = 0$ e $x = 3$

è *positiva* in $]-\infty, 0[\cup]0, 3[$; è *negativa* per $x > 3$.

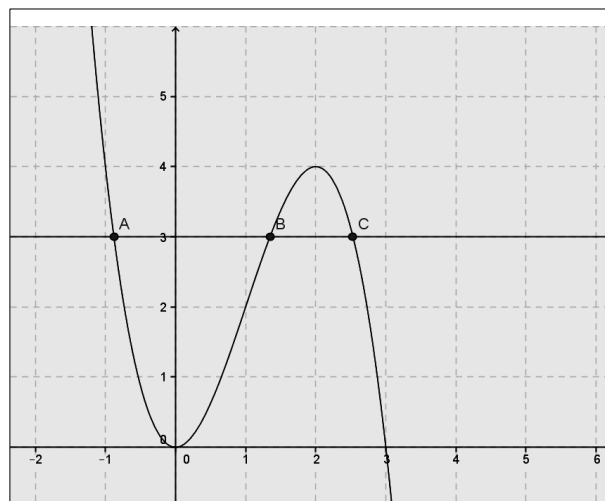
Poiché $f'(x) = 6x - 3x^2$ si annulla per $x = 0$ e per $x = 2$ ed è positiva per

$0 < x < 2$, nello stesso intervallo $f(x)$ è crescente mentre è decrescente all'esterno.

Dal segno della derivata seconda,

$f''(x) = 6 - 6x$, si deduce che la curva è convessa per $x < 1$, concava per $x > 1$

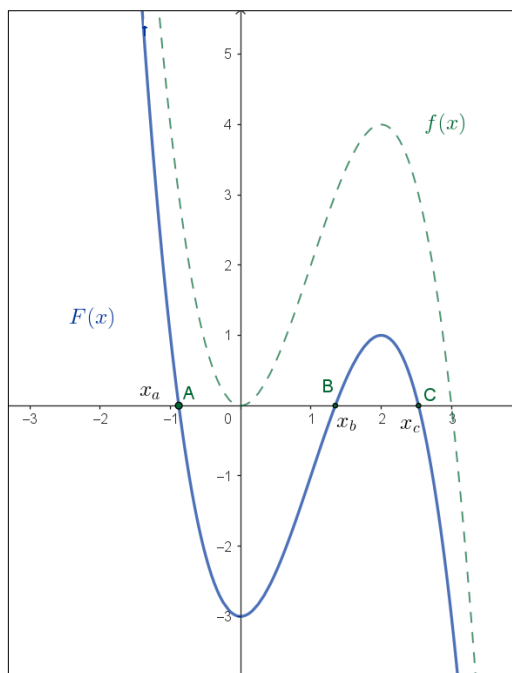
Nell'intervallo $[0; 3]$, $f(x)$ ha minimo assoluto uguale a 0 massimo assoluto nel punto $M(2; 4)$



Scelto un numero reale k , se

- $k < 0$ non esiste alcuna soluzione reale dell'equazione assegnata, compresa tra 0 e 3
- $k = 0$ esistono tre soluzioni reali di cui due coincidenti e uguali a 0 e l'altra uguale a 3
- $0 < k < 4$ due soluzioni reali e distinte nell'intervallo $[0; 3]$
- $k = 4$ due soluzioni reali e coincidenti, nell'intervallo $[0; 3]$
- $k > 4$ nessuna soluzione nell'intervallo, nel quale, ricordiamo 4 è il massimo assoluto

Per $k = 3$ l'equazione ammette tre soluzioni reali, di cui una negativa e due positive.



Il grafico della funzione $F(x) = f(x) - 3$ si ottiene da quello di $f(x)$ con una traslazione di -3 lungo l'asse delle ordinate.

Inoltre si ha $F(2) = 1$ $F(3) = -3$

Separazione delle radici

Per il teorema di esistenza degli zeri, $F(x)$ si annulla almeno una volta all'interno dell'intervallo $[2; 3]$

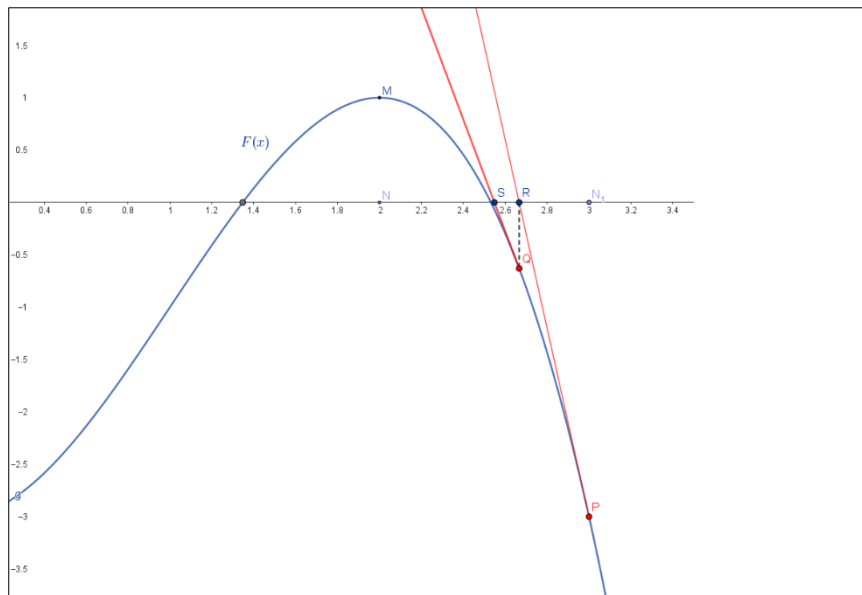
Poiché la funzione è continua e monotona in ciascuno degli intervalli $0 < x < x_b$ e $2 < x < 3$, l'equazione ammette una sola soluzione in ciascuno di essi. La maggiore, x_c , è compresa tra 2 e 3

1. Impostiamo la tabella per l'approssimazione della soluzione a due cifre decimali esatte, utilizzando il metodo di bisezione

a	b	F(a)	F(b)	F(a)*F(b)	(a+b)/2	F(a+b)/2	b-a	risultato
2	3	1	-3	-3	2,5	0,125	1	
2,5	3	0,125	-3	-0,375	2,75	-1,109375	0,5	
				-				
2,5	2,75	0,125	1,1094	-0,1387	2,6250	-0,4160	0,2500	
				-				
2,5	2,625	0,125	0,4160	-0,0520	2,5625	-0,1272	0,1250	
				-				
2,5	2,5625	0,125	0,1272	-0,0159	2,5313	0,0034	0,0625	
				-				
2,5313	2,5625	0,0034	0,1272	-0,0004	2,5469	-0,0608	0,0313	
				-				
2,5313	2,5469	0,0034	0,0608	-0,0002	2,5391	-0,0284	0,0156	
				-				
2,5313	2,5391	0,0034	0,0284	-0,0001	2,5352	-0,0124	0,0078	2,53

2. Metodo di Newton (delle tangenti)

Per ottenere valori approssimati della radice appartenente all'intervallo $[2,3]$ si deve costruire la successione $x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F'(x_n)$



- Poiché $F'(2) = 0$ $F'(x) < 0$ in $[2,3]$ $F''(x) < 0$ in $[2,3]$ va scelto, come punto di inizio delle iterazioni, il valore $x = 3$, essendo il segno di $F(3)$ concorde con quello di $F''(3)$.
- La tangente alla curva nel punto $P(3, F(3))$ incontra l'asse x nel punto R la cui ascissa è la seconda approssimazione della radice x_{max}
- La tangente alla curva nel punto $Q(2.5, F(2.5))$ incontra l'asse x nel punto S la cui ascissa è la terza approssimazione della radice x_c
- L'algoritmo si arresta quando $x_{n+1} - x_n < 0,01$

Nella tabella seguente sono riportati i valori ottenuti nel foglio elettronico dove l'arresto è assicurato dalla funzione logica `=SE(ASS(B2-F2)<0,01;" ";F2)` inserite nella cella B3 e copiata nella colonna B

	A	B	C	D	E	F
1	n	x_n	$F(x_n)$	$F'(x_n)$	$F(x_n)/F'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F'(x_n)$
2	1	3	-3	-9	0,33	2,67
3	2	2,67	-0,63	-5,33	0,12	2,55
4	3	2,55	-0,07	-4,19	0,02	2,53
5	4	2,53	0,00	-4,04	0,00	2,53

La convergenza richiede un minor numero di iterazioni rispetto al metodo dicotomico, il quale però ha altri vantaggi

- è più semplice sia concettualmente che come "costo computazionale"
- Converge sicuramente se è rispettata la continuità della funzione e l'ipotesi $f(a)f(b) < 0$.