

Riflessione su due paradossi di Zenone

di Antonino Giambò

PREMESSA. Questo articolo va a sostituire quello, avente lo stesso titolo, già pubblicato, poiché quell'articolo contiene, nella riflessione sul paradosso della dicotomia, un errore segnalatomi dal Prof. Michelangelo Di Stasio, che ringrazio pubblicamente.

1. Velia – una frazione del comune di Ascea, in provincia di Salerno – è il nome che, fin dai tempi di Cicerone (106-43 a.C.), i Romani attribuirono alla città di Elea, antica polis della Magna Grecia.

In quella città il filosofo Parmenide, vissuto nel VI sec. a.C., fondò una scuola che fu chiamata *scuola eleatica*. Uno dei maggiori rappresentanti di questa scuola fu Zenone.

Zenone è ricordato soprattutto per quattro celebri paradossi.

Detto per inciso, in matematica un **paradosso** è una proposizione, eventualmente anche dimostrabile, che però contraddice la logica e il senso comune. Non bisogna confonderla con l'**antinomia**, che è invece una proposizione che porta sempre ad una contraddizione.

Tornando ai paradossi di Zenone, in questo articolo mi occuperò di due di essi: il *paradosso della dicotomia* e il *paradosso di Achille e la tartaruga*.

- Del paradosso della dicotomia descriverò una delle due versioni possibili.

Questo paradosso afferma che un soggetto che voglia passare dalla posizione A alla posizione B di un segmento di retta, deve prima passare dalla posizione di mezzo C; ma, una volta raggiunta C, deve passare per la posizione mediana D fra C e B, e dopo per la posizione mediana E fra D e B; e, così via, all'infinito, senza che alcun passaggio possa essere quello conclusivo. Per cui il soggetto non raggiungerà mai la destinazione B.

- Il paradosso di Achille e la tartaruga, il più celebre fra i paradossi di Zenone, afferma che se Achille sfida alla corsa una tartaruga, concedendole un piede di vantaggio, non la raggiungerà mai. Questo perché Achille, per raggiungere la tartaruga, dovrebbe prima raggiungere la posizione occupata da lei all'inizio della gara; ma quando Achille avrà raggiunto quella posizione, la tartaruga nel frattempo si sarà portata in un'altra posizione e tutto ricomincia per prolungarsi all'infinito. Per cui Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

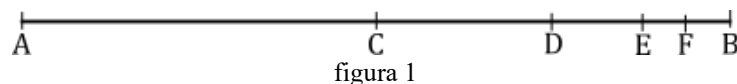
Intendiamoci. Che il movimento da una posizione A ad una posizione B sia possibile o che Achille raggiunga in un qualche istante la tartaruga sono fatti inoppugnabili. Ma proprio qui sta il paradosso: che una forma un po' strana di ragionamento li escluda.

Proverò ad analizzare questi due paradossi dal punto di vista della Matematica, interpretandoli proprio nel linguaggio di questa disciplina.

Fornirò delle dimostrazioni che sembrano sciogliere i due paradossi, ma al contempo ne fornirò altre che sembrano dimostrare il contrario.

2. Il paradosso della dicotomia.

- Un soggetto deve andare da A a B muovendosi lungo il segmento di retta AB (figura 1). Supponiamo che il segmento sia lungo 2.



Egli deve passare prima per la posizione C, punto medio del segmento AB, ed è evidentemente $AC=1$.

Ma, una volta raggiunta C, deve passare per il punto medio D del segmento CB, ed è chiaramente $CD=\frac{1}{2}$.

Proseguendo, per andare da D a B deve passare per il punto medio E del segmento DB, ed è $DE=\frac{1}{4}$.

E così via all'infinito.

A questo punto, sommando tutte le distanze descritte, si ottiene la seguente somma:

$$L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

L è dunque la somma di infiniti termini positivi e, secondo Zenone, questa somma non può essere che infinita.

Cosicché non c'è un ultimo e conclusivo passaggio e il soggetto non raggiungerà mai la destinazione B.

- Per lungo tempo gli studiosi cercarono un ragionamento che sciogliesse il paradosso, ma senza riuscirci.

Nel Seicento, però, quando s'incominciarono a studiare le serie, i matematici trovarono che esistono somme di infiniti termini numerici positivi aventi valore finito. E la serie suddetta è una di queste.

Essa è, precisamente, la somma di infiniti termini in progressione geometrica di primo termine 1 e ragione $\frac{1}{2}$. Per cui, la somma L_n dei suoi primi n termini è:

$$L_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

E si ha evidentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = 2.$$

In questo modo, il movimento da A a B, smembrato in un numero infinito di piccole distanze, risulta ricostruito.

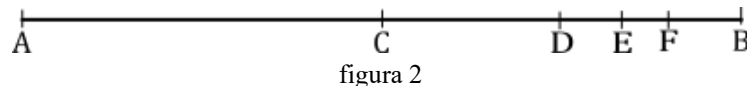
Sembra che tutto sia a posto e, per dirla tutta, l'ho creduto da sempre o, per lo meno, da quando mi sono occupato di queste cose. Finché non sono stato messo in crisi dalla lettura di un articolo di Daniele Liberi [3].

Cerco di chiarire, rifacendomi appunto alle considerazioni di Liberi.

- Se il procedimento matematico seguito per sciogliere il paradosso fosse corretto, dovrebbe portare allo stesso risultato per qualunque smembramento del movimento fra A e B. Ma purtroppo non è così.

Seguiamo, per rendercene conto, il seguente ragionamento, simile al precedente.

Il soggetto in questione, come sopra, deve andare da A a B lungo il segmento $AB=2$ (figura 2).



Deve passare prima dal punto C tale che $AC=1$. Ma, una volta raggiunta C, per andare da C a B deve passare per il punto D tale che $CD = \frac{1}{2}$. E per andare da D a B deve passare per il punto E tale che $DE = \frac{1}{3}$. E poi deve passare per il punto F tale che $EF = \frac{1}{4}$. E così via all'infinito.

A questo punto, come prima, si sommano tutte le distanze descritte e si ottiene la seguente somma:

$$L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Solo che adesso la serie in questione non converge.

Quindi il procedimento esposto non funziona sempre e pertanto non sembra idoneo a sciogliere il paradosso.

3. Passiamo al paradosso di Achille e la tartaruga.

- Ammettiamo che all'inizio Achille occupi la posizione A e la tartaruga la posizione T_1 , per cui il segmento AT_1 sarebbe lungo un piede (figura 3).



Allora:

- nel tempo t_1 Achille raggiunge la posizione T_1 , ma nel frattempo la tartaruga si è portata nella posizione T_2 , percorrendo lo spazio T_1T_2 ;

- per raggiungere la posizione T_2 , Achille impiegherà un tempo t_2 , ma nel frattempo la tartaruga si sarà portata nella posizione T_3 , percorrendo lo spazio T_2T_3 ;
- ... ;
- per raggiungere la posizione T_n , Achille impiegherà un tempo t_n , ma nel frattempo la tartaruga si sarà portata nella posizione T_{n+1} , percorrendo lo spazio T_nT_{n+1} ;
- e così all'infinito.

Ad Achille, per raggiungere la tartaruga, occorre pertanto un tempo T tale che:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n + \dots$$

formato dalla somma di infiniti termini e, come sopra, secondo Zenone questa somma non può essere che infinita e perciò Achille non raggiungerà mai la tartaruga.

- Faccio vedere come i matematici hanno sciolto il paradosso.

Ammettiamo allora che Achille tenga una velocità V , pari a k volte quella della tartaruga ($k > 1$): si capisce che nel medesimo tempo in cui Achille percorre un certo spazio, la tartaruga percorre $1/k$ di quello spazio. Come dire che:

$$T_1T_2 = \frac{1}{k}AT_1, \quad T_2T_3 = \frac{1}{k}T_1T_2 = \frac{1}{k^2}AT_1, \dots, \quad T_{n-1}T_n = \frac{1}{k}T_{n-2}T_{n-1} = \frac{1}{k^{n-1}}AT_1, \dots$$

D'altra parte, risulta:

$$t_1 = \frac{AT_1}{V}, \quad t_2 = \frac{T_1T_2}{V} = \frac{1}{k} \cdot \frac{AT_1}{V}, \quad t_3 = \frac{T_2T_3}{V} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{AT_1}{V}, \dots, \quad t_n = \frac{T_{n-1}T_{n-2}}{V} = \frac{1}{k^{n-1}} \cdot \frac{AT_1}{V}, \dots$$

Per cui si ha:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n + \dots = \frac{AT_1}{V} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} + \dots \right).$$

La quantità dentro parentesi, con un ragionamento simile a quello esposto riguardo al paradosso della dicotomia, si dimostra essere uguale a $\frac{k}{k-1}$. Pertanto il tempo T impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga è in realtà un tempo finito, dato precisamente dalla seguente espressione:

$$T = \frac{AT_1}{V} \cdot \frac{k}{k-1},$$

contrariamente a quanto sosteneva Zenone.

Anche adesso sembra tutto a posto, ma anche adesso si può obiettare qualcosa. In sostanza, se il procedimento seguito è valido, dovrebbe funzionare qualunque sia la velocità di Achille, purché ovviamente sia maggiore di quella della tartaruga. Ma vediamo cosa succede in una situazione diversa.

- Seguiamo allora questo ragionamento, sempre con riferimento alla stessa figura 3, supponendo che le velocità di Achille e della tartaruga non siano più costanti, ma siano diversi nei vari tratti.

Sia t_1 il tempo impiegato da Achille per percorrere lo spazio AT_1 ; la sua velocità è pertanto:

$$V_{1A} = \frac{AT_1}{t_1}.$$

Nello stesso tempo t_1 la tartaruga percorre lo spazio T_1T_2 per cui la sua velocità è:

$$V_{1T} = \frac{T_1T_2}{t_1}.$$

Sia $t_2 = \frac{1}{2} t_1$ il tempo impiegato da Achille per percorrere lo spazio T_1T_2 ; di modo che la sua velocità è:

$$V_{2A} = \frac{T_1T_2}{t_2} = 2 \frac{T_1T_2}{t_1}.$$

Nello stesso tempo t_2 la tartaruga percorre lo spazio T_2T_3 per cui la sua velocità è:

$$V_{2T} = \frac{T_2T_3}{t_2} = 2 \frac{T_2T_3}{t_1}.$$

Sia $t_3 = \frac{1}{3} t_1$ il tempo impiegato da Achille per percorrere lo spazio T_2T_3 ; di modo che la sua velocità è:

$$V_{3A} = \frac{T_2 T_3}{t_3} = 3 \frac{T_2 T_3}{t_1}.$$

Nello stesso tempo t_3 la tartaruga percorre lo spazio $T_3 T_4$ per cui la sua velocità è:

$$V_{3T} = \frac{T_3 T_4}{t_3} = 3 \frac{T_3 T_4}{t_1}.$$

E così via, sia $t_n = \frac{1}{n} t_1$ il tempo impiegato da Achille per percorrere lo spazio $T_{n-1} T_n$; di modo che la sua velocità è:

$$V_{nA} = \frac{T_{n-1} T_n}{t_n} = n \frac{T_{n-1} T_n}{t_1}.$$

Nello stesso tempo t_n la tartaruga percorre lo spazio $T_n T_{n+1}$ per cui la sua velocità è:

$$V_{nT} = \frac{T_n T_{n+1}}{t_n} = n \frac{T_n T_{n+1}}{t_1}.$$

Osserviamo che, mettendo a confronto la velocità V_{kA} ($k=1, 2, 3, \dots, n$) di Achille quando percorre lo spazio $T_{k-1} T_k$ con la velocità V_{kT} della tartaruga quando percorre lo spazio successivo $T_k T_{k+1}$, risulta:

$$\frac{V_{kA}}{V_{kT}} = \frac{T_{k-1} T_k}{T_k T_{k+1}}$$

ed essendo chiaramente $T_{k-1} T_k > T_k T_{k+1}$, risulta: $V_{kA} > V_{kT}$. Com'è ovvio.

Ad Achille, dunque, per raggiungere la tartaruga, occorrerebbe un tempo T tale che sia:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n + \dots = t_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right).$$

Solo che adesso la serie dentro parentesi non converge, per cui Achille non raggiunge mai la tartaruga.

Quindi il procedimento esposto, come nel caso del paradosso della dicotomia, non funziona sempre e pertanto non sembra idoneo a sciogliere il paradosso di Achille e la tartaruga.

4. Per completezza di ragionamento, dimostriamo che la serie seguente:

$$[1] \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

nota come **serie armonica**, è divergente.

E chiaramente, come conseguenza, è divergente anche la serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

già vista precedentemente.

A questo riguardo, assieme alla serie [1] consideriamo quest'altra serie:

$$[2] \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots.$$

Indicato con a_n il termine generale della serie [2] e con b_n quello della serie [1], è evidente che risulta $a_n \leq b_n$. D'altra parte la serie [2], dopo aver sommato le frazioni con lo stesso denominatore (dopo il numero 1, una frazione ha denominatore 2; 2 hanno denominatore 4; 4 hanno denominatore 8; 8 hanno denominatore 16; ...; 2^{n-1} hanno denominatore 2^n), può essere scritta in questo modo:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

e la ridotta S_n di questa nuova serie vale:

$$S_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2};$$

ed è evidentemente: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Se ne desume che la serie [2] diverge. Quindi, per il criterio di confronto, diverge pure la serie [1], cioè la serie armonica.

5. Insomma, dobbiamo concludere che la Matematica non è in grado di sciogliere i due paradossi presi in esame? Oppure basta un esempio, in cui li risolve, per concludere il contrario? O forse esistono altri metodi, non ancora scoperti, per risolvere la questione?

O forse non è il caso di lasciar perdere del tutto e di dedicarsi a fatti più costruttivi?

Pongo quest'ultimo interrogativo perché i paradossi di Zenone portarono la Matematica ufficiale a bandire l'uso diretto dell'infinito perché foriero di contraddizioni, costringendola in questo modo a segnare il passo. Basti pensare ai virtuosismi di Euclide, nel tentativo appunto di evitare l'uso diretto dell'infinito. E solo la presenza di matematici eretici, come lo furono, in particolare, Archimede di Siracusa (287 circa – 212 a.C.) ed Erone di Alessandria (I-II sec. d.C.), la Matematica riuscì a progredire.

Ancora una riflessione.

Strettamente connesso al concetto di “infinito” è il concetto di “infinitamente piccolo”.

Come di quello anche di questo era inibito l'uso nella Matematica ufficiale antica. Ed è ancora Zenone il responsabile. Ecco, con libera interpretazione, il suo ragionamento per escludere l'infinitamente piccolo, che egli assimilava al nulla.

Se una grandezza si divide in parti, le parti sono sempre più piccole della grandezza originaria; per cui, continuando la suddivisione all'infinito, si finisce per ottenere parti “infinitamente piccole” e perciò “nulle”. Ora, volendo ricostituire la grandezza originaria a partire da tali parti “infinitamente piccole”, si dovrebbero “sommare le infinite parti infinitamente piccole”, ossia si dovrebbero sommare infinite grandezze nulle. Ma questo darebbe come risultato una grandezza nulla, mentre la grandezza originaria non lo è. Dunque non ha senso parlare di suddivisione infinita né di grandezze infinitamente piccole.

In realtà, proprio il modo di ragionare di Zenone è alla base del calcolo integrale ed oggi non crea più alcuna sorpresa né tantomeno scandalo il fatto che la “somma di infinite quantità infinitamente piccole” possa dare come risultato un valore finito.

Ma questo Zenone non lo poteva sapere. Due secoli più tardi il grande Archimede, rifacendosi alla concezione atomistica di Democrito di Abdera (460-360 a.C.), non si sarebbe fatto scrupolo di utilizzare proprio il concetto di somma di infinite quantità infinitamente piccole per giungere alla scoperta di risultati eccezionali. Anche se, poi, per scrupolo, forniva di quei risultati una dimostrazione che non richiedeva un coinvolgimento diretto dell'infinito. Una dimostrazione, com'è noto, basata su un postulato che Eudosso di Cnido (408-355 a.C.) aveva enunciato, ma che proprio Archimede utilizzò di frequente e che, proprio per questo, è di solito denominato “postulato di Eudosso-Archimede”.

6. Considerato che le serie numeriche svolgono un ruolo importante nell'analisi dei paradossi di Zenone, un breve cenno storico sulla loro nascita non è fuori luogo.

Ho detto all'inizio che i matematici del Seicento trovarono esempi di somme di infiniti numeri positivi aventi un valore finito. Questo significa precisamente che quei matematici e, in particolare, l'inglese Isaac Newton (1643-1727) e il tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), ma specialmente i successori di Leibniz, tra i quali soprattutto lo svizzero Jakob Bernoulli (1655-1705), se ne occuparono sistematicamente.

Ma le serie avevano trovato già da tempo chi se ne occupasse, quantunque in modo episodico.

Qualche esempio in ordine cronologico.

- Già il filosofo greco Aristotele (384-322 a.C.) nell'opera *Fisica* sembra avere consapevolezza del fatto che la serie geometrica:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$$

converga quando $|q| < 1$.

- Il francese Nicole Oresme (1323-1382), vescovo di Lisieux, dimostrò la divergenza della serie armonica.

- Il matematico e logico inglese Richard Suiseth (noto anche come Richard Swineshead), attivo intorno alla metà del secolo XIV, e denominato *Calculator* per la sua abilità nei calcoli, fornì il primo esempio di somma di infiniti numeri positivi aventi un valore finito. Egli infatti, con un lungo enunciato e una più lunga dissertazione verbale, si occupò della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

dimostrando che ha un valore finito ed esattamente il valore 2.

- Il francese François Viète (1540-1603) dimostrò che la serie geometrica converge al valore finito $\frac{1}{1-q}$ quando $|q| < 1$.

- Anche il sacerdote e matematico bolognese Pietro Mengoli (1626-1686) dimostrò la non convergenza della serie armonica. Egli si occupò pure della serie seguente, nota appunto come *serie di Mengoli*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

dimostrando che converge ad 1.

Rimando, per notizie più approfondite sull'argomento, ai due articoli pubblicati in passato su questa medesima rubrica: *Le serie infinite: primi approcci, parti prima e seconda*.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Eric T. Bell, *I grandi matematici*, Firenze, Biblioteca Sansoni, 1966.
- [2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Oscar Studio Mondadori, 1980.
- [3] Daniele Liberi, *I paradossi di Zenone*, articolo reperibile in Internet.
- [4] Carlo Toffalori, *I paradossi di Zenone*, articolo reperibile in Internet.