

UN PROBLEMA DI MODELLAZIONE PER LA PROVA D'ESAME

L'intelligenza artificiale ChatGpt, invitata a formulare alcune tracce di matematica per una simulazione dell'esame di Stato del liceo scientifico, propone due problemi di modellizzazione, una formulazione un po' lontana dalle scelte ministeriali degli ultimi due anni.

I testi trattano argomenti classici ,quali lo svuotamento di un serbatoio e la costruzione di una scatola di cartone ,ma presentano qualche suggerimento interessante e sono adatti a una riflessione sulla formulazione delle tracce e sulle potenzialità dei contributi di AI.

PROBLEMA 1. Equazione differenziale e applicazione alla Fisica

Un serbatoio contiene acqua e si svuota attraverso un foro sul fondo.

Il volume $V(t)$ in litri dell'acqua nel serbatoio al tempo t (in minuti) è descritta dal modello

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{V}$$

con $k > 0$ costante reale positiva.

Richieste:

Risolvere l'equazione differenziale e determinare $V(t)$ sapendo che $V(0) = V_0$

2. Trovare il tempo T dopo il quale il serbatoio si svuota completamente
3. Discutere l'andamento della funzione $V(t)$ nel tempo
4. Se $V_0 = 100$ litri e $k = 0.5$ determinare T
5. Rappresentare graficamente $V(t)$ e discutere la sensibilità di T rispetto al parametro k

PROBLEMA 2 – Geometria solida e ottimizzazione

Considera una scatola senza coperchio a base quadrata da costruire a partire da un foglio di cartone quadrato di lato L , tagliando dei quadrati agli angoli e ripiegando i bordi verso l'alto.

Richieste:

1. Scrivere una funzione che esprima il volume della scatola in funzione della lunghezza del lato del quadrato tagliato, x .
2. Determinare l'intervallo di validità per x .
3. Trovare il valore di x che massimizza il volume della scatola
4. Calcolare il volume massimo nel caso $L=40$ cm
5. Verificare la natura del punto critico ottenuto

Il primo problema sembra più interessante in quanto si presta anche ad una formulazione interdisciplinare, adatta per una seconda prova integrata di matematica e fisica.

Nella discussione sulla formulazione e sui contenuti del testo è stato coinvolto anche Gemini. La conversazione si è conclusa con la decisione di trasformare il problema in un

quesito da inserire eventualmente nella seconda parte della prova d'esame (Questionario) oppure di sfruttare il tema per un problema interdisciplinare.

Le prove e le soluzioni elaborate dalle due intelligenze artificiali (sulle quali è stato necessario intervenire per correggere qualche imprecisione o per sollecitare alcuni approfondimenti) presentano alcune differenze che possono indirizzare le eventuali scelte del docente .

Conversazione con ChatGpt e con Gemini sul Problema_1

Commento di CHATGPT

ChatGpt risponde in modo puntuale e schematico, generalmente esaustivo, anche se non sempre coerente con le ultime scelte ministeriali, riguardo la formulazione delle prove d'esame- Le risposte più interessanti sono evidenziate in grassetto.

Domanda: Perché ritieni che questa traccia sia adatta a una simulazione della prova scritta di matematica per i licei scientifici?

Risposta

Questa traccia è molto adatta come simulazione della seconda prova scritta per i licei scientifici in quanto rappresenta un classico problema di analisi matematica applicata alla Fisica, con un buon livello di complessità e di applicazione di tecniche di integrazione e risoluzione di equazioni differenziali. E' molto ben strutturata e si presta perfettamente come esercizio d'esame.

Aspetti positivi

- **Contenuto coerente con i percorsi didattici del liceo scientifico**
- **È un'applicazione diretta alla fisica, quindi interdisciplinare (ottimo per il nuovo impianto dell'Esame di Stato), e permette collegamenti con la legge di Torricelli.**
- **Grado di difficoltà adeguato**
- **Richiede la risoluzione di un'equazione differenziale non banale ma accessibile.**
Le richieste successive (tempo di svuotamento, analisi qualitativa, sensibilità al parametro) aumentano il livello di profondità in modo progressivo.
- **Permette di valutare capacità di calcolo, modellizzazione e riflessione qualitativa, tutte competenze chiave per l'Esame di Stato.**
- **Spunti per la rappresentazione grafica e la discussione**

Il grafico di $V(t)$ non solo aiuta a consolidare la comprensione del problema, ma fornisce uno spunto importante per la valutazione di competenze visive e interpretative.

- **La sensibilità di T rispetto al parametro k è un invito alla riflessione sul ruolo dei parametri nei modelli matematici — un elemento che eleva il livello del problema.**
- **Strumenti ammessi:** se la prova sarà svolta con calcolatrice grafica o strumenti digitali, si potrebbe chiedere esplicitamente di usare la tecnologia per la parte grafica e di discussione parametrica.

Commento di GEMINI

Gemini risponde in modo pertinente, con dovizia di osservazioni ,rischiando di essere prolisso e ripetitivo. Le risposte riportate sono state opportunamente semplificate.

Il PROBLEMA_1 è adatto per essere assegnato agli studenti di liceo scientifico come simulazione della prova scritta di matematica agli esani di Stato?

Risposta

Sì, assolutamente. Il problema _1 è molto adatto per essere assegnato agli studenti di liceo scientifico come simulazione della prova scritta di matematica agli Esami di Stato per diverse ragioni:

Aspetti che lo rendono idoneo:

Coinvolge concetti chiave dell'analisi matematica e richiede diverse abilità: Equazioni differenziali, Integrazione, Funzioni e loro proprietà. Rappresentazione grafica. Discussione sulla dipendenza della soluzione da un parametro

- Presenta un contesto fisico significativo: Il problema è modellato su una situazione reale (svuotamento di un serbatoio), il che può rendere l'esercizio più interessante e motivante per gli studenti.
- **La difficoltà è calibrata** per un compito in classe o una simulazione d'esame. Non è eccessivamente complesso, ma richiede una buona comprensione dei concetti e capacità di applicarli.
- **Simula la struttura di un problema d'esame: è suddiviso in più punti, ognuno dei quali richiede un'abilità specifica, proprio come i problemi proposti all'Esame di Stato.**

Eventuali adattamenti o considerazioni:

Livello di dettaglio richiesto nella discussione: L'insegnante potrebbe specificare il livello di dettaglio atteso nella discussione dell'andamento di $V(t)$.

Richiesta di ulteriori interpretazioni fisiche: Si **potrebbe chiedere agli studenti di interpretare il significato fisico della derivata $\frac{dV}{dt}$.**

Variazioni del problema: Si potrebbero proporre variazioni, ad esempio, con una diversa dipendenza della velocità di deflusso dal volume (es. proporzionale a V invece di $\sqrt{V}$)

Osservazione _1 : Rifletti sull'affermazione:<<Eventuali adattamenti o considerazioni: Si potrebbero proporre variazioni, ad esempio, con una diversa dipendenza della velocità di deflusso dal volume (es. proporzionale a V invece di radice di V .>>

Questa variazione non sarebbe incoerente col fenomeno fisico che l'equazione differenziale deve rappresentare?>>

Risposta di GEMINI

Hai assolutamente ragione a sollevare questa importante obiezione! Proporre una dipendenza lineare della velocità di deflusso dal volume ($dV/dt \propto V$) sarebbe **incoerente con il fenomeno**

fisico dello svuotamento di un serbatoio governato dalla gravità e dalla pressione idrostatica, che è alla base della legge di Torricelli

*Grazie per avermi fatto notare questa incoerenza fisica. È fondamentale che i modelli matematici utilizzati per descrivere fenomeni fisici siano basati su principi fisici validi. **La mia precedente "variazione" era un esempio matematico astratto che non si applica direttamente alla fisica dello svuotamento del serbatoio per gravità.***

Osservazione_2: le equazioni differenziali sono affrontate nel liceo scientifico ma non sono inserite nei Quadri di riferimento per la formulazione delle prove di matematica

Risposta di CHATGPT

Ottima osservazione ,molto pertinente. Anche se le equazioni differenziali sono trattate nel liceo scientifico, non compaiono esplicitamente nei Quadri di Riferimento ministeriali per la seconda prova di matematica. Questo significa che:

- Non sono garantite per tutti gli studenti, anche se sono tradizionalmente presente in molti libri di testo e programmi reali.
- **Il loro utilizzo in una simulazione** deve essere **valutato attentamente**, soprattutto se la prova è pensata come *allenamento standard* per tutti, oppure se si conosce il percorso formativo specifico degli studenti.

Suggerimento: Se vuoi mantenere la traccia (che è molto buona), potresti:

- Inserirla come “problema a scelta”, alternativa a un altro problema più aderente al Quadro.
- Esplicitare che è pensata per classi che hanno affrontato questo argomento.

Oppure, leggermente modificarla per evitare il linguaggio delle equazioni differenziali (es. proporre il modello già risolto e chiedere di analizzarlo)

Risposta di GEMINI

Pur essendo un problema interessante e formativo, nella sua forma attuale che richiede esplicitamente la risoluzione di un'equazione differenziale, non sarebbe strettamente conforme ai Quadri di riferimento per la formulazione della seconda prova scritta dell'Esame di Stato del liceo scientifico.

Per renderlo più adatto, si potrebbe:

- **Fornire la soluzione dell'equazione differenziale e chiedere agli studenti di analizzarla e interpretarla.**
- Concentrarsi sulla modellizzazione e sull'interpretazione fisica del problema, evitando la richiesta esplicita di risolvere l'equazione differenziale.

Collegamenti interdisciplinari: Se il problema fosse inserito in un contesto che richiama anche contenuti di fisica (dove le equazioni differenziali sono uno strumento fondamentale), potrebbe esserci una maggiore tolleranza, purché le competenze richieste agli studenti si concentrino sull'interpretazione e l'applicazione del modello, piuttosto che sulla risoluzione di equazioni differenziali complesse

Osservazione_3: Il problema di cui stiamo discutendo ha un grosso limite per poter essere accettato come prova d'esame: le richieste della traccia non sono tra loro indipendenti, pertanto, un errore nel primo punto rischia di invalidare l'intera soluzione. Come si può eliminare questo inconveniente?

Risposta di CHATGPT

Hai centrato un punto importante: questo tipo di traccia richiede di risolvere correttamente il primo punto per poter affrontare tutti i successivi, il che rende il problema dipendente in cascata. In un contesto come l'esame di maturità, questo può essere penalizzante per gli studenti: un piccolo errore iniziale può compromettere l'intera prova, anche se lo studente avrebbe potuto svolgere correttamente le parti successive. Questo aspetto è stato infatti oggetto di critiche anche in sede di simulazioni.

Suggerimento: Suddividere e guidare-Fornire i passaggi intermedi (almeno come risultato numerico o simbolico), per rendere i punti successivi affrontabili anche in caso di errore

iniziale: "Si può dimostrare che la soluzione dell'equazione è $V = \left(\sqrt{V_0} - \frac{k}{2}t \right)^2$ "

Risposta di GEMINI

Hai sollevato un'osservazione cruciale e assolutamente valida riguardo alla progettazione di una prova d'esame. La dipendenza sequenziale tra le domande può penalizzare severamente un candidato che non riesce a superare il primo ostacolo, anche se potrebbe avere competenze per rispondere alle domande successive.

Per eliminare questo inconveniente e rendere la prova più equa e valutativa delle diverse competenze, la traccia potrebbe includere una formulazione del tipo: "Si ammette che la soluzione dell'equazione differenziale con la condizione iniziale $V(0) = V_0$ sia data da

$$V = \left(\sqrt{V_0} - \frac{k}{2}t \right)^2$$

Osservazione_4 : Dalla discussione emerge che, eliminando le criticità legate alla risoluzione dell'equazione differenziale e della non indipendenza delle richieste, la prova risulta semplificata ma forse perde lo spessore che si addice a un problema d'esame. Pensiamo a un'altra soluzione: trasformare il problema in uno dei quesiti del questionario della traccia d'esame. Le richieste potrebbero essere limitate alla verifica della soluzione dell'equazione differenziale, al grafico della funzione parabolica e al significato fisico del suo andamento

Risposta di GEMINI

Trasformare il problema in un quesito ben formulato mi sembra una soluzione efficace per includere questo scenario interessante nella prova d'esame in modo appropriato e valutativo

Caratteristiche del testo:

- Breve e mirato: Adatto al formato di un quesito.
- Centrato su competenze chiave: derivazione, analisi di grafici, interpretazione fisica.

Risposta di CHATGPT : Una versione a scelta multipla mi sembra un ottimo modo per sondare rapidamente la comprensione dei concetti chiave relativi al modello di svuotamento del

serbatoio, toccando sia l'aspetto matematico (equazioni differenziali, derivate, unità di misura) che l'interpretazione del modello.

Questi dovrebbero essere gli obiettivi didattici:

- Comprensione del modello e dell'equazione differenziale.
- Analisi dimensionale.
- Interpretazione fisica dei parametri.

Osservazione_5: Il legame con la fisica, fa pensare che il problema, da cui è partita la nostra conversazione, possa essere formulato in ambito interdisciplinare; pertanto, potrebbe diventare una simulazione di una prova di esame di tipologia << prova integrata di matematica e fisica.>> Quale potrebbe essere una formulazione?

Risposta di GEMINI

Assolutamente! L'intuizione di trasformare questo problema in una prova interdisciplinare è eccellente. Il contesto dello svuotamento di un serbatoio si presta magnificamente a collegamenti tra matematica e fisica.

Motivazioni per questa formulazione:

- **Integra competenze:** Richiede agli studenti di utilizzare sia strumenti matematici (equazioni differenziali, analisi di funzioni) che concetti fisici (legge di Torricelli, portata).
- **Contesto reale:** Si basa su un fenomeno fisico concreto e facilmente visualizzabile.
- **Approfondimento:** Permette di esplorare il modello matematico a diversi livelli (risoluzione, analisi, interpretazione, sensibilità).
- **Pensiero critico:** Incoraggia gli studenti a riflettere sul significato dei parametri e sulla validità del modello.

La valutazione terrà conto di:

- Correttezza delle risoluzioni matematiche.
- Rigore nell'applicazione dei principi fisici.
- Capacità di interpretare i risultati nel contesto fisico.
- Chiarezza e precisione nell'esposizione.
- Corretto uso della terminologia scientifica.

Risposta di CHATGPT

Una traccia per la prova integrata di matematica e fisica collega la modellizzazione fisica del deflusso dell'acqua con la derivazione e la risoluzione di un'equazione differenziale, permette di valutare sia le competenze di analisi matematica sia la capacità di interpretare e applicare concetti fisici reali.

Osservazione_6 Nella della traccia di matematica è precisato che il volume è misurato in litri e il tempo in minuti. In seguito, nella richiesta n.4, è assegnato , alla costante k , solo un valore numerico .

Nella prova interdisciplinare ,che coinvolge altre grandezze come la pressione e l'accelerazione di gravità , la gestione corretta delle unità di misura può risultare ambigua.

Risposta di ChatGpt

Ottima osservazione! Il controllo delle **unità di misura** e la **verifica dimensionale** sono fondamentali in fisica e in modellizzazione e si potrebbe affrontare meglio nelle ultime due domande per la costante k , per il grafico e la sensibilità.

Risposta di GEMINI

Passare al Sistema Internazionale sarebbe la scelta più rigorosa dal punto di vista fisico se si vuole collegare k ai parametri geometrici e all'accelerazione di gravità. Tuttavia, se l'obiettivo principale è valutare la comprensione del modello matematico e la sua interpretazione con unità più intuitive come litri e minuti, è preferibile fornire direttamente il valore di k con l'unità coerente.

Grazie per aver sollevato questa importante questione! La scelta delle unità di misura è fondamentale per la corretta interpretazione e applicazione dei modelli fisici.