

Problema 2 - Ordinaria 2014 – Liceo della Comunicazione

Sia $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 12$

1. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha una sola radice α tale che $1 < \alpha < 2$.

Si verifichi che l'espressione $x = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$ equivale a $f(x) = 0$.

2. Posto $x_0 = 1,3$ si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, $x_1, x_2, x_3 \dots$ ove è

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{4(3-x_n)}{3+x_n}}. \text{ Cosa si può osservare? Si può congetturare che } x_n, \text{ al crescere di}$$

n , approssimi sempre meglio il valore di α ? In che modo? Con quali considerazioni?

3. Sia R la regione del quarto quadrante compresa fra il grafico K di $f(x)$ e gli assi del sistema di coordinate Oxy . Si calcoli l'area di R .

4. Si introduca un nuovo sistema di riferimento ottenuto da Oxy traslando gli assi e portando O nel punto di flesso di K . Qual è l'equazione di K nel nuovo sistema di riferimento?

Soluzione

1. $f(x)$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ ed è monotona crescente in quanto

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Essendo $f(1) = -4 < 0$ mentre $f(2) = 16 > 0$, per il teorema di esistenza degli zeri, $f(x)$ ha uno zero compreso tra 1 e 2 e, per la monotonia della funzione, esso è unico.

L'equazione $f(x) = 0$ può essere scritta, dopo facili passaggi algebrici, nella forma

$x^2(x+3) = 4(3-x) \rightarrow x = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$, poiché l'unica soluzione dell'equazione è compresa tra 1 e 2, quindi positiva e diversa da -3 .

2. Si ponga $g(x) = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$. Applicando l'algoritmo iterativo si trovano valori approssimati (alternativamente per eccesso e per difetto) della radice α .

Osservando che deve essere $\alpha = F(\alpha)$, limitandoci all'approssimazione di 2 cifre decimali, già il valore di x_3 può essere accettato

	x	$g(x)$	scarto
x_0	1,30	1,26	0,04
x_1	1,26	1,28	-0,02
x_2	1,28	1,27	0,01
x_3	1,27	1,27	-0,01

Interpretazione grafica dei risultati

La radice α è l'ascissa del punto A comune al grafico Γ della funzione $F(x)$ e a quello della retta r di equazione $y = x$

Studiamo l'andamento della funzione $g(x) = \sqrt{\frac{4(3-x)}{3+x}}$ individuando soprattutto gli elementi che possono essere utili per comprendere il procedimento di approssimazione illustrato in precedenza.

$g(x)$ è definita nell'intervallo $]-3; 3]$, non è mai negativa e si annulla per $x=3$

Poiché $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = +\infty$, la retta $x=-3$ è asintoto verticale

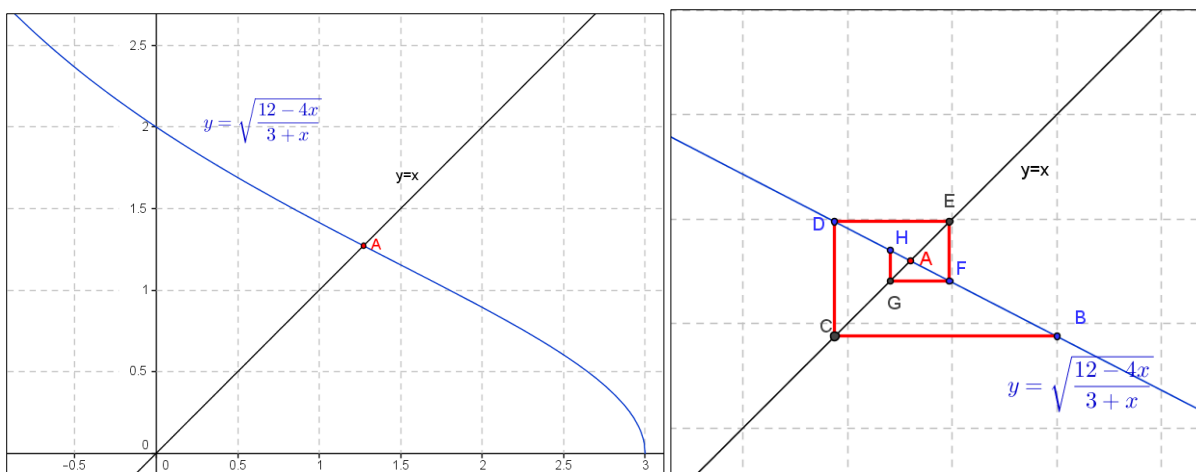
La derivata $g'(x) = \frac{-6}{(x+3)^2 \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}$ è negativa nell'intervallo $]-3; 3[$ pertanto $g(x)$ è decrescente, in particolare, nell'intorno di A.

La derivata $g''(x) = 6(3-2x) \frac{\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}}{(x+3)^2(x-3)^2}$ è positiva per $-3 < x < \frac{3}{2}$, negativa

per $\frac{3}{2} < x < 3$, nulla per $x = \frac{3}{2}$

Il grafico Γ della funzione $g(x)$ cambia concavità nell'intorno del punto di ascissa $\frac{3}{2}$

Rappresentiamo la curva Γ e la retta r in un sistema di assi cartesiani Oxy



Sostituendo a x il valore $x_0 = 1,3$ si trova $g(1,3) \cong 1,26 \neq x_0$ e questo prova che x_0 non è uguale ad α ma ne è un valore approssimato

- Il punto B(1,3; 1,26) appartiene al grafico di $g(x)$ ma non alla retta r . (B è prossimo al punto A ma non coincide con A).
- La parallela condotta da B all'asse x incontra la retta r nel punto C(1,26; 1,26).
- La parallela condotta da C all'asse y incontra la curva Γ nel punto D(1,26; 1,28).

- Procedendo in modo analogo si trovano segmenti paralleli all'asse x o all'asse y , alternativamente, di lunghezza decrescente, e punti di F o punti di r sempre più prossimi al punto A .

OSSERVAZIONE Una risposta più rigorosa alla questione del punto 2 dovrebbe fare riferimento al **Metodo delle approssimazioni successive (o del punto fisso)** su cui riportiamo una breve nota teorica.

Si consideri l'equazione $f(x) = 0$ scritta nella forma $x = g(x)$

Se $f(\alpha) = 0$ vale la relazione $\alpha = g(\alpha)$, pertanto

- il punto di coordinate $(\alpha, g(\alpha))$ è punto comune alla retta di equazione $y = x$ e alla curva di equazione $y = g(x)$
- α è punto fisso per $g(x)$ (pensata come trasformazione)

Nell'ipotesi che $g(x)$ sia derivabile in un intorno $I(\alpha)$ e che $\alpha = g(\alpha)$ se e solo se $f(\alpha) = 0$, è possibile costruire una successione $\{x_n\}$ che (se converge) approssimi lo zero α .

x_0 = approssimazione iniziale nota

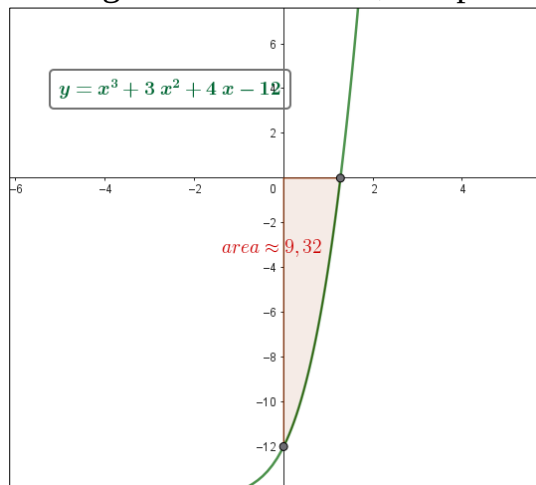
$x_{k+1} = g(x_k) \quad k = 0, 1, \dots$

La convergenza del metodo dipende dalla derivata di $g(x)$ nel punto fisso, più precisamente:

- se $|g'(\alpha)| < 1$ il metodo converge,
- se $|g'(\alpha)| > 1$ il metodo non converge.

Poiché il testo del problema parla di <<osservare>> e <<congetturare>>, la soluzione degli studenti può rimanere nell'ambito delle considerazioni di tipo euristico.

3. Il grafico K di $f(x)$ incontra l'asse y nel punto $(0; -12)$ e l'asse x nel punto $(\alpha; 0)$ ed è, come è già stato osservato, sempre crescente.



L'area della regione R , rappresentata in figura, è uguale a

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha -f(x) dx &= -\int_0^\alpha (x^3 + 3x^2 + 4x - 12) dx = \\ &= -\left[\frac{x^4}{4} + x^3 + 2x^2 - 12x\right]_0^\alpha = \\ &= -\left(\frac{\alpha^4}{4} + \alpha^3 + 2\alpha^2 - 12\alpha\right) \cong 9.32 \end{aligned}$$

Il valore è stato stimato utilizzando le approssimazioni di α determinate nel punto 2.

4. Consideriamo la derivata seconda di $f(x)$

$f''(x) = 6x + 6$ si annulla per $x = -1$ e cambia segno nel suo intorno

Pertanto il punto di flesso della curva K è $F(-1; -14)$

Sia $O'XY$ il nuovo sistema di riferimento, ottenuto traslando gli assi in modo che il punto F diventi l'origine

Le equazioni della traslazione sono: $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 14 \end{cases}$

Sostituendo $\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y - 14 \end{cases}$ nell'equazione $y = x^3 + 3x^2 + 4x - 12$ si ottiene

$$Y - 14 = (X - 1)^3 + 3(X - 1)^2 + 4(X - 1) - 12 \rightarrow$$

$$Y - 14 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 + 3X^2 - 6X + 3 + 4X - 4 - 12 \rightarrow Y = X^3 + X$$

Equazione di K nel nuovo riferimento $Y = X^3 + X$.