

PROBLEMA

1. Si determini la funzione $f(x)$ che risolve il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

e si verifichi che la curva γ di equazione $y = f(x)$ è un ramo della parabola Γ avente il vertice nel punto $V(0,0)$ e il fuoco nel punto $F(\frac{1}{2}, 0)$.

2. Si illustri il significato geometrico della relazione $y' = \frac{1}{y}$ per un generico punto $P(x, y) \in \gamma$ e si deducano da essa le proprietà della sottotangente e della sottonormale a una parabola:
- la sottotangente rispetto all'asse ha il vertice della parabola come punto medio
 - la sottonormale rispetto all'asse è costante (ed uguale alla distanza fuoco-direttrice)
3. Il fuoco di una parabola presenta un'interessante proprietà ottica: se un raggio di luce, emesso da una sorgente situata nel fuoco, va ad incidere su un punto della parabola, il raggio riflesso avrà direzione parallela all'asse della parabola stessa.
Ricordando che i due raggi sono simmetrici rispetto alla normale alla parabola nel punto di incidenza, si deduca dalle suddette proprietà che $f(x)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y' = \frac{1}{y}$.
4. Si considerino il triangolo PFH (essendo F il fuoco e H la proiezione di P sulla direttrice) e il triangolo mistilineo PCV , essendo C la proiezione di P sull'asse x e PV l'arco di parabola.
Dopo aver espresso in funzione dell'ascissa di P le rispettive aree, Σ e Σ_1 , si studi l'andamento della funzione $g(x)$ corrispondente al rapporto Σ_1 / Σ .
Si verifichi che :
se $g(x) = 1$, il triangolo PFH risulta equilatero .
Si dia un'interpretazione geometrica del risultato

Soluzione**PUNTO 1**

Poiché la funzione $\frac{1}{y}$ è continua se $y \neq 0$, il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione in un intorno del punto $A(2,2)$ in cui risulti $y > 0$.

$y' = \frac{1}{y}$ è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili:
 $y \cdot y' = 1$ con condizione iniziale $y(2) = 2$

Per risolverla calcoliamo l'integrale definito, nell'intervallo $[2, x]$, di entrambi i membri

$$\int_2^x y(t) \cdot y'(t) dt = \int_2^x dt$$

$$\frac{1}{2}y(x)^2 - \frac{1}{2}y(2)^2 = x - 2 \rightarrow \frac{1}{2}y(x)^2 - \frac{1}{2}4 = x - 2 \rightarrow y^2 = 2x$$

Dovendo essere soddisfatta la condizione $y > 0$, la soluzione del problema di Cauchy è la funzione

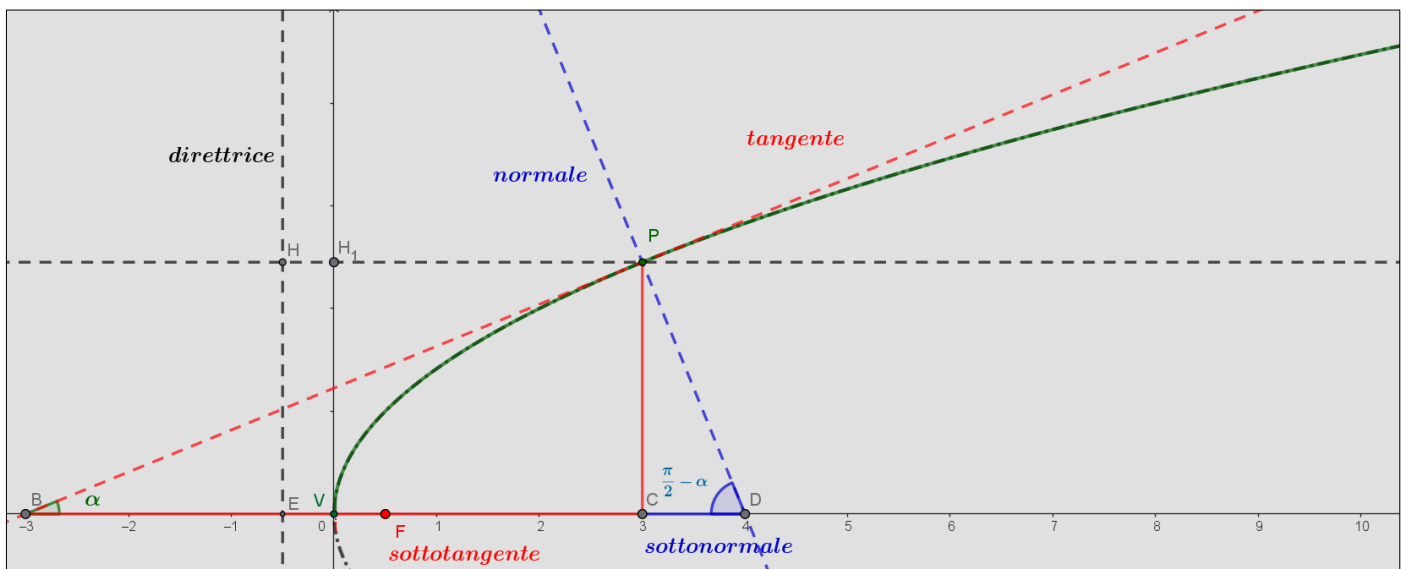
$$y = f(x) = \sqrt{2x} \quad \text{con } x > 0$$

La funzione corrisponde a un ramo della parabola di equazione $y^2 = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}y^2$, privato del vertice $V(0, 0)$.

Il fuoco è il punto di coordinate $(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}) \rightarrow F(\frac{1}{2}, 0)$.

PUNTO 2

La relazione $y' = \frac{1}{y}$ indica che in ogni punto di γ il coefficiente angolare della retta tangente è inversamente proporzionale all'ordinata del punto e precisamente uguale al suo reciproco. Con riferimento alla figura seguente **(Figura 1):**



$$P(x, y) \in \gamma$$

$$\overline{PC} = y ; \overline{BC} = \text{sottotangente} ; \overline{CD} = \text{sottonormale};$$

$$\overline{EF} = 1 = \text{distanza fuoco} - \text{direttrice} \quad y' = \tan \alpha = \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}$$

a) Essendo $y' = \frac{1}{y}$, $y^2 = 2x$

$$y' = \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{BC} = \overline{PC}^2 = 2x \rightarrow \overline{BV} = 2x - x = x$$

V è punto medio di BC

b) Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo BPC rettangolo in P :

$$\overline{CD} = \frac{\overline{PC}^2}{\overline{BC}} = \overline{PC} \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}} \rightarrow y \cdot y' = 1$$

Pertanto

$$\overline{CD} = \overline{EF} \quad \forall P(x, y) \in \gamma$$

PUNTO 3

Con riferimento alla figura seguente **(Figura 2):**

Sia $P(x, y)$ un punto della curva γ di equazione $y = f(x) = \sqrt{2x}$

Siano

- F' il simmetrico di F rispetto alla normale n
- $\hat{i}$ l'ampiezza dell'angolo di incidenza
- $\hat{r}$ l'ampiezza dell'angolo di riflessione

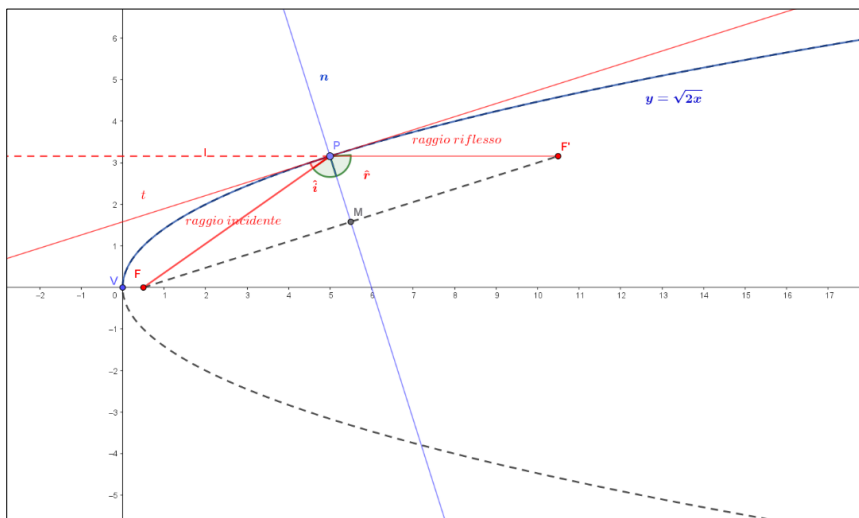


Figura 2

Se $PF' \parallel$ asse x allora il $y' = \frac{1}{y}$

Dimostrazione analitica

I segmenti PF e PF' sono tra loro simmetrici rispetto alla normale n . Pertanto,

- $\overline{PF'} = \overline{PF} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4} + 2x} = x + \frac{1}{2}$
- $F' \left(2x + \frac{1}{2}, y \right)$
- $FF' \parallel t$

$$y' = \text{Coefficiente angolare di } t = \text{Coefficiente angolare di } FF' = \frac{y}{2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{y}{2x} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$$

Metodo trigonometrico **Figura 3**

Indicati, rispettivamente, con

- α l'ampiezza dell'angolo che la tangente forma con la direzione positiva dell'asse x
- $m = y'(x) = \tan \alpha$ il coefficiente angolare della tangente in P
- $n = -\frac{1}{m}$ il coefficiente della normale in P

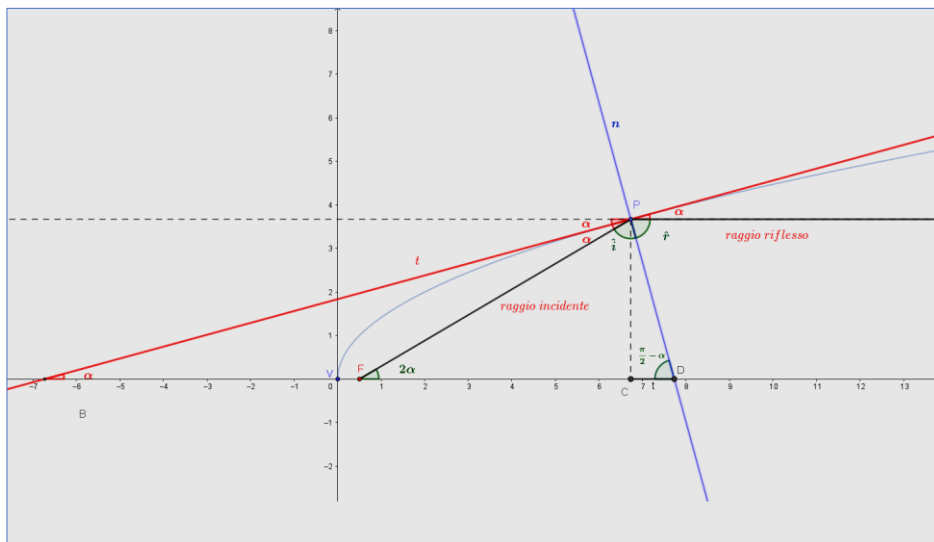


Figura 3

Le leggi della riflessione possono essere riassunte nelle uguaglianze

$$\hat{i} = \hat{r} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

che implicano $D\hat{F}P = 2\alpha$.

Poiché $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2m}{1 - m^2}$ imponiamo l'uguaglianza

$$\frac{2m}{1 - m^2} = \frac{\overline{PC}}{\overline{FC}} = \frac{y}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2y}{2x - 1} = \frac{2y}{y^2 - 1}$$

Poiché sostituendo a m il valore $\frac{1}{y}$ si ottiene un'identità : $\frac{\frac{2}{y}}{1 - \frac{1}{y^2}} = \frac{2y}{y^2 - 1}$ possiamo affermare

che, per i punti della curva γ di equazione $y = f(x) = \sqrt{2x}$, vale l'uguaglianza $y' = \frac{1}{y}$

Osservazione

Risolvendo l'equazione in m : $\frac{2m}{1 - m^2} = \frac{2y}{y^2 - 1}$ si ottengono due soluzioni:

$$m_1 = \frac{1}{y} > 0 \quad m_2 = -y < 0$$

di cui va accettata solo quella positiva, essendo $\alpha < \frac{\pi}{2}$

PUNTO 4

Con riferimento alla **Figura 4**

L'area Σ del triangolo PHF è uguale

$$a \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2x}}{2} = \frac{(2x+1)\sqrt{2x}}{4} \quad \text{con } x > 0$$

L'area Σ_1 del triangolo mistilineo è uguale

$$a \int_0^x \sqrt{2t} \, dt = \frac{2}{3} \sqrt{2x^3} \quad \text{con } x > 0$$

$$g(x) = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{2x^3}}{\frac{(2x+1)\sqrt{2x}}{4}} = \frac{8x}{3(2x+1)} \quad \text{con } x > 0$$

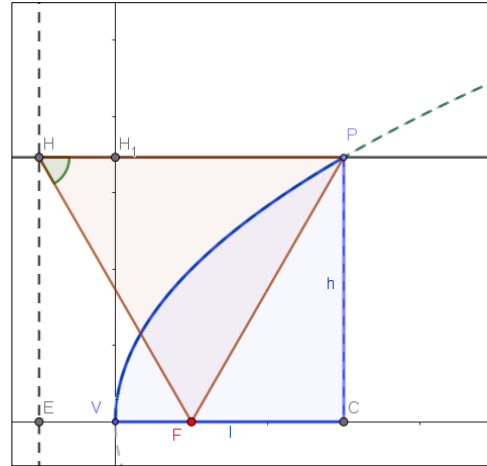


Figura 4

Andamento di $g(x)$ [ramo di una funzione omografica] **Figura 5**

Dominio $D]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{4}{3}^-$$

$$g'(x) = \frac{8}{3(2x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in D \quad g''(x) = -\frac{32}{3(2x+1)^3} < 0 \quad \forall x \in D$$

La funzione $g(x)$ è positiva, crescente e concava nel suo dominio.

Tende a 0 per x tendente a 0 da destra e tende asintoticamente a $\frac{4}{3}$ al tendere di x a $+\infty$

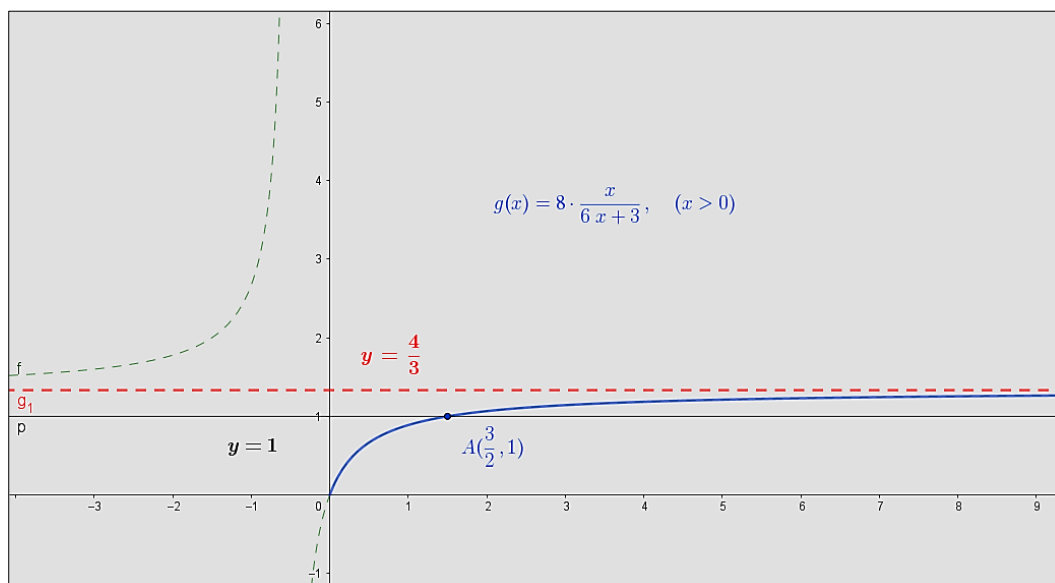


Figura 5

La funzione $g(x)$ assume il valore 1 se $8x = 3(2x + 1) \rightarrow x = \frac{3}{2}$

In corrispondenza , le due aree risultano uguali :

$$\Sigma = \frac{\left(\frac{2^3+1}{2}\right)\sqrt{2^{\frac{3}{2}}}}{4} = \sqrt{3} \quad \Sigma_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{4}} = \sqrt{3} \quad . \quad \text{Inoltre}$$

$$\overline{PH} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \quad \overline{PH} = \overline{PF} \quad \text{per la relazione caratteristica dei punti di una parabola}$$

$$\overline{HF} = \sqrt{\overline{HE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{2\frac{3}{2} + 1} = 2 \rightarrow \overline{HF} = \overline{PH} = \overline{PF}$$

Il triangolo P_eHF dove $P_e\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$, è, pertanto, equilatero

Interpretazione geometrica **Figura 6**

Il triangolo PHF è equivalente alla metà del rettangolo $HPCE$.

Il triangolo mistilineo PCV è la metà del segmento parabolico individuato dalla corda passante per P e parallela alla tangente nel vertice. Per il teorema di Archimede, pertanto, è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del rettangolo H_1PCV avente base $\overline{VC} = x$ e altezza $\overline{PC} = y = \sqrt{2x}$.

Le due aree saranno uguali se $\frac{2}{3}H_1PCV = \frac{1}{2}HPCE$, cioè se $H_1PCV = \frac{3}{4}HPCE$, ovvero

$$\text{se } \overline{VC} = \frac{3}{4}\overline{EC} \rightarrow \overline{EF} = \overline{FC} = 1$$

Di conseguenza i due triangoli rettangoli HEF e PCF sono tra loro congruenti e risulta, $\overline{PF} = \overline{FH}$

Essendo anche $\overline{PH} = \overline{PF}$, il triangolo PHF è equilatero.

L'ampiezza dell'angolo $C\hat{B}P_e$ è uguale a 30° , quindi $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, in accordo con la condizione di partenza $y' = \frac{1}{v}$

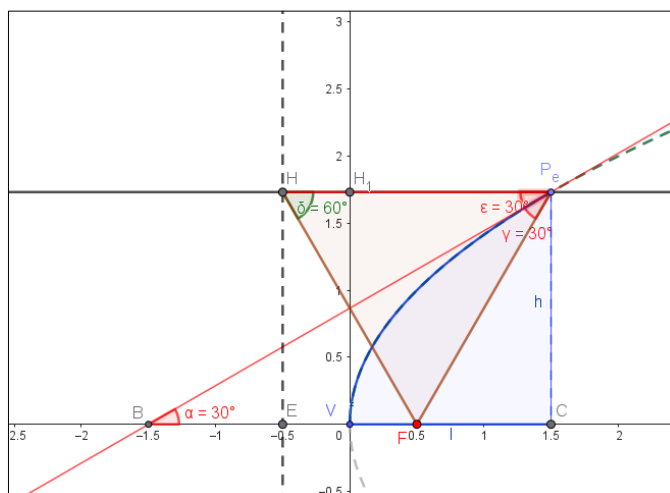


Figura 6