

Qualche quesito di probabilità

di Antonino Giambò

1. I quesiti di probabilità offrono sempre spunti interessanti di discussione, anche perché spesso l'esito contraddice quello che si pensa di intuire di primo acchito.

Ho avuto occasione di trattarne in un articolo dal titolo *Probabilità e pseudo-ragionamenti* pubblicato su questa medesima rivista in data 18 dicembre 2019.

In questo articolo propongo altre questioni, senza la pretesa di essere originale, ma con il solo intento di stimolare l'interesse degli studenti liceali e di invitarli ad una adeguata riflessione.

Qualcuno degli esercizi proposti è presente, soluzione compresa, nel sito web:

www.matematicagrattuitaperscuolesuperiori.it

2. ESERCIZIO 1.

In un'urna ci sono 4 palline, 2 bianche e 2 nere. Se ne estraggono due a caso, una dopo l'altra.

- a) Quanti sono i casi possibili?
- b) Qual è la probabilità che le due palline estratte siano dello stesso colore?
- c) Quale che siano di colore diverso?

RISOLUZIONE.

a) *Le due palline estratte possono essere o tutte e due bianche o tutte e due nere oppure di colore diverso: tre casi possibili e ognuno avente quindi probabilità 1/3.*

È corretto ragionare in questo modo? C'è chi lo fa e sbaglia clamorosamente.

Vediamo allora qual è un ragionamento corretto.

Le due palline bianche sono due entità diverse: le indichiamo con B_1 e B_2 . Così pure le due palline nere che indichiamo con N_1 e N_2 .

Il numero dei casi possibili è perciò uguale al numero $D_{4,2}$ delle disposizioni semplici di 4 oggetti distinti, presi a 2 a 2, vale a dire $D_{4,2}=4\cdot3=12$, e questi casi sono esattamente i seguenti (in ogni coppia la pallina indicata per prima è la prima estratta):

$B_1-B_2, B_2-B_1, N_1-N_2, N_2-N_1, B_1-N_1, B_1-N_2, B_2-N_1, B_2-N_2, N_1-B_1, N_1-B_2, N_2-B_1, N_2-B_2$.

b) *Possiamo dire che i casi favorevoli all'evento "le due palline estratte sono dello stesso colore" sono i due seguenti: 1) esce pallina bianca – esce pallina bianca, 2) esce pallina nera – esce pallina nera?*

Ovviamente NO, in virtù di quanto spiegato in precedenza.

Un modo corretto di ragionare è invece il seguente:

Dei 12 casi possibili, quelli favorevoli all'evento "le due palline estratte sono dello stesso colore" sono i seguenti:

$B_1-B_2, B_2-B_1, N_1-N_2, N_2-N_1$.

Vale a dire 4 casi. La probabilità P' che le due palline siano dello stesso colore è dunque:

$$P' = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

c) Di conseguenza, la probabilità P'' che le due palline estratte siano di colore diverso (evento esattamente opposto al precedente) è:

$$P'' = 1 - P' = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Questa probabilità si può trovare direttamente, osservando che dei 12 casi possibili, quelli favorevoli all'evento "le due palline estratte sono di colore diverso" sono i seguenti 8:

$B_1-N_1, B_1-N_2, B_2-N_1, B_2-N_2, N_1-B_1, N_1-B_2, N_2-B_1, N_2-B_2$.

La probabilità P' che le due palline siano di colore diverso è dunque:

$$P' = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

- C'è un altro modo di calcolare la probabilità P' , più rapido, utilizzando la probabilità condizionata e i teoremi delle probabilità composte e delle probabilità totali.

Per questo, indichiamo con B pallina bianca e con N pallina nera. Si ha allora:

$$P' = P(B) \cdot P(B/B) + P(N) \cdot P(N/N) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Con analogo ragionamento si può anche calcolare la probabilità P'' . Precisamente:

$$P'' = P(B) \cdot P(N/B) + P(N) \cdot P(B/N) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. ESERCIZIO 2.

Vittoria e Aldo, novelli sposi, contro una recente consuetudine che prevede al più 2 figli per una coppia di sposi, programmano di metterne al mondo 4.

- Quanti sono i casi possibili riguardo al sesso dei 4 nascituri?
- Qual è la probabilità che il figlio maggiore e il figlio minore siano entrambi maschi?
- È più probabile che, dei 4 figli, 2 siano maschi e 2 femmine oppure che 3 figli siano di uno stesso sesso e uno di sesso diverso?

RISOLUZIONE.

- Si potrebbe pensare che i casi possibili siano i seguenti:*

4 maschi, 4 femmine, 3 maschi e una femmina, 3 femmine e un maschio, 2 femmine e 2 maschi.

Vale a dire 5 casi. Ma non è così.

In effetti, i casi possibili sono tanti quante le disposizioni con ripetizione di due oggetti distinti (M-F) presi a 4 a 4 (numero di figli), cioè:

$$D'_{2,4} = 2^4 = 16.$$

b) Poiché ogni nascituro può essere maschio (M) o femmina (F), con uguali possibilità, la probabilità che il figlio maggiore sia maschio è $1/2$, così come è $1/2$ la probabilità che il figlio minore sia maschio. Pertanto, la probabilità P' che si verifichino entrambi gli eventi, vale a dire che siano maschi tanto il figlio maggiore quanto il figlio minore, è:

$$P' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

- Saresti disposto a scommettere che il caso più probabile è che ci siano 2 maschi e 2 femmine?*

Se lo fai, prendi un abbaglio.

Andiamo a vedere perché.

I casi che, dei 4 figli, 2 siano maschi e 2 femmine sono tanti quante le permutazioni con ripetizione di 4 oggetti, dei quali 2 sono uguali fra loro e altri 2 sono uguali fra loro, ma diversi dagli altri due, vale a dire:

$$P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6.$$

Circa l'eventualità che, dei 4 figli, 3 siano di uno stesso sesso ed uno di sesso diverso, bisogna considerare due possibilità: 1) che i 3 figli dello stesso sesso siano maschi, 2) che siano femmine. In ciascuno delle due eventualità i casi possibili sono tanti quante le permutazioni con ripetizione di 4 oggetti, di cui 3 uguali fra loro ed uno diverso, vale a dire:

$$P_4^{(3,1)} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 4.$$

Quindi, complessivamente, sono 8 i casi che, dei 4 figli, 3 siano dello stesso sesso e uno di sesso diverso.

Questi casi sono pertanto in numero maggiore dei casi in cui ci siano 2 maschi e 2 femmine.

Esistono altri modi per rispondere ai quesiti proposti. Ne indichiamo uno, il più elementare, basato sull'elenco di tutti i possibili casi. Indicati dunque con M figlio maschio e con F figlia femmina, elenchiamo tutte le 16 possibilità (ogni quaterna è ordinata secondo l'età dei nascituri, dal maggiore al minore):

1) MMMM	2) MMMF	3) MMFM	4) MMFF
5) MFMM	6) MFMF	7) MFFM	8) MFFF
9) FMMM	10) FMMF	11) FMFM	12) FMFF
13) FFMM	14) FFMF	15) FFFM	16) FFFF

tabella 1

E si costata facilmente che:

- in 4 casi su 16 (1-3-5-7) il figlio maggiore e il figlio minore sono entrambi maschi;
- in 6 casi (4-6-7-10-11-13) 2 dei 4 figli sono maschi e 2 sono femmine;
- in 8 casi (2-3-5-8-9-12-14-15) 3 dei 4 figli sono di uno stesso sesso ed uno è di sesso diverso.

4. ESERCIZIO 3.

I coniugi Alba e Claudio, mettendo al mondo un figlio, hanno il 20% di probabilità che questo sia biondo. Essi programmano di avere 3 figli. Calcolare la probabilità che:

- almeno uno dei nati sia biondo;
- nessuno dei nati sia biondo.
- esattamente uno dei nati sia biondo.

RISOLUZIONE.

Indichiamo con B l'evento "figlio biondo" e con N l'evento "figlio non biondo".

Gli eventi possibili sono i seguenti 8:

BBB-BBN-BNB-BNN-NBB-NBN-NNB-NNN.

Sulla base di questa disposizione, ritieni forse che la probabilità di nessun figlio biondo sia $1/8=12,5\%$, quella di almeno un figlio biondo sia $7/8=87,5\%$ e quella di esattamente un figlio biondo sia $3/8=37,5\%$?

Sarebbe così, in effetti, se gli eventi fossero equiprobabili, ma non lo sono, per cui le risposte sono altre.

Dobbiamo utilizzare proprietà note della probabilità. Vediamo in che modo.

Riguardo i quesiti a) e b), conviene prima rispondere alla b), ossia calcolare la probabilità che nessuno dei nati sia biondo.

Teniamo presente che la probabilità di B è $20\%=1/5$, per cui quella di N, che è la probabilità opposta, è $1 - 1/5 = 4/5$. Di conseguenza la probabilità di "nessun B" è la seguente:

$$P(\text{nessun B})=P(\text{NNN})=P(N) \cdot P(N) \cdot P(N) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{125} = 48,8\%.$$

Di conseguenza:

$$P(\text{almeno un B})=1 - P(\text{nessun B})=1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125} = 51,2\%.$$

Riguardo il quesito c), i casi che si abbia esattamente un B, sono i seguenti: BNN – NBN – NNB. Ciascuna terna è ordinata secondo l'età dei nati, dal maggiore al minore. Pertanto, la probabilità P' di avere esattamente un B è la seguente:

$$P' = P(\text{BNN}) + P(\text{NBN}) + P(\text{NNB}) = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 3 = \frac{48}{125} = 38,4\%.$$

5. ESERCIZIO 4.

I coniugi Rossi hanno 4 figli.

- Il signor Carlo ha saputo da conoscenti che uno dei 4 figli è maschio e una è femmina. Si domanda: Qual è la probabilità che anche gli altri due figli siano un maschio e una femmina?
- Da parte sua, invece, la signora Maria è venuta a sapere solamente che il maggiore dei 4 figli è un maschio. Si chiede:
Qual è la probabilità che uno solo degli altri 3 figli sia maschio?
Prova a rispondere agli interrogativi dei signori Carlo e Maria.

RISOLUZIONE.

Occupiamoci del quesito a).

Il signor Carlo la fa facile. Ecco il suo ragionamento: siccome si sa che 2 dei 4 figli sono un maschio e una femmina, basta ragionare sugli altri 2 figli. I casi possibili sono 3: due maschi, due femmine, un maschio e una femmina. In un caso su 3 gli altri due figli sono un maschio e una femmina, quindi la probabilità cercata è $1/3$.

Tutto sbagliato.

Vediamo invece qual è un **modo corretto** di ragionare.

I casi possibili, nella situazione in cui ci sono 4 figli, lo sappiamo già, sono tanti quante le disposizioni con ripetizione di 2 oggetti distinti (Maschio-M, Femmina-F) presi a 4 a 4, vale a dire $2^4=16$.

Nel caso in esame, però, in cui si sa che dei 4 figli uno è maschio ed una è femmina, bisogna escludere i casi MMMM e FFFF in cui tutti e 4 i figli sono maschi o sono femmine. Rimangono così 14 casi possibili.

Di questi casi, quelli favorevoli all'evento sono i casi in cui ci sono 2 maschi e 2 femmine. Ossia, i 6 casi seguenti, dove sono disposti in ordine, in base all'anzianità, i 4 figli:

MMFF, MFMF, MFFM, FFMM, FMFM, FMMF.

La probabilità cercata è pertanto:

$$P_A = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}.$$

Occupiamoci adesso del quesito b).

Anche la signora Maria la fa facile. Essa ragiona in questo modo: considerato che ci sono 3 possibilità (i 3 figli dopo il maggiore) ed uno solo deve essere maschio, la probabilità è $1/3$.

Ragionamento errato.

Vediamo un **ragionamento corretto**.

Dei 16 casi teorici possibili bisogna prendere in considerazione solamente gli 8 casi in cui il figlio maggiore è un maschio e sono i seguenti:

MMMM, MMMF, MMFM, MMFF, MFMM, MFMF, MFFM, MFFF.

Di essi, quelli favorevoli all'evento sono quelli in cui oltre al primo M c'è solamente un altro M, ossia i seguenti:

MMFF, MFMF, MFFM.

La probabilità cercata è pertanto:

$$P_B = \frac{3}{8}.$$

Qualora qualcuno non fosse convinto dei ragionamenti fatti, può prendere visione della precedente tabella 1, dove sono elencati tutti i possibili casi che si possono presentare nel caso di 4 figli.

6. ESERCIZIO 5.

Un'urna contiene 100 palline, delle quali 25 bianche, 25 nere, 25 rosse e 25 verdi. Se ne estraggono 4 una dopo l'altra, senza rimetterle nell'urna. Calcolare la probabilità che:

- 1) tra le 4 palline estratte non ce ne siano due dello stesso colore;
- 2) almeno due delle 4 palline estratte siano dello stesso colore;
- 3) le 4 palline estratte siano tutte dello stesso colore;
- 4) delle 4 palline estratte 3 siano di uno stesso colore e una di colore diverso.

RISOLUZIONE.

L'esercizio si risolve utilizzando le proprietà della probabilità.

1) Occupiamoci dell'evento E_1 di cui al punto 1).

Estratta una prima pallina, essa avrà un colore qualsiasi C_1 fra i quattro possibili. A questo punto l'urna risulta modificata: essa infatti ha, ora, 99 palline di cui 24 del colore C_1 ; la probabilità che la seconda pallina abbia il colore C_2 diverso da C_1 è $25/99$.

Dopo aver estratto la seconda pallina, nell'urna ne rimangono 98, di cui 24 del colore C1 e 24 del colore C2. Allora, la probabilità di estrarre una terza pallina del colore C3, diverso sia da C1 sia da C2, è $25/98$. Infine, la probabilità che la quarta pallina estratta abbia il rimanente colore C4 (diverso dai tre precedenti) è $25/97$. In definitiva, la probabilità $p(E_1)$ è:

$$P(E_1) = \frac{25}{99} \cdot \frac{25}{98} \cdot \frac{25}{97} \approx 1,66\%.$$

2) In merito all'evento E_2 di cui al punto 2), basta osservare che l'evento "almeno due delle quattro palline estratte sono dello stesso colore" è l'evento contrario di E_1 "tra le quattro palline estratte non ce ne sono due dello stesso colore". Sicché:

$$P(E_2) = p(\bar{E}_1) = 1 - p(E_1) \approx 98,34\%.$$

3) Detto ora E_3 l'evento di cui al punto 3) ed estratta una pallina, questa avrà un colore C qualsiasi fra i quattro possibili. A questo punto la probabilità che la seconda pallina abbia lo stesso colore C è $24/99$, la probabilità che la terza pallina abbia ancora colore C è $23/98$ e la probabilità che la quarta abbia pure colore C è $22/97$. Quindi:

$$P(E_3) = \frac{24}{99} \cdot \frac{23}{98} \cdot \frac{22}{97} \approx 1,29\%.$$

4) Indichiamo con E_4 l'evento di cui al punto 4).

Incominciamo a calcolare la probabilità che delle 4 palline estratte 3 siano bianche ed una sia di colore diverso, tenendo presente che la pallina di colore diverso può uscire al 4° posto o al 3° o al 2° o al 1°. Detto allora E'_4 questo evento e indicata con X una pallina di colore diverso dal bianco, si ha:

$$\begin{aligned} P(E'_4) &= P(BBBX) + P(BBXB) + P(BXBB) + P(XBBB) = \\ &= \left(\frac{25}{100} \cdot \frac{24}{99} \cdot \frac{23}{98} \cdot \frac{75}{97} \right) + \left(\frac{25}{100} \cdot \frac{24}{99} \cdot \frac{75}{98} \cdot \frac{23}{97} \right) + \left(\frac{25}{100} \cdot \frac{75}{99} \cdot \frac{24}{98} \cdot \frac{23}{97} \right) + \left(\frac{75}{100} \cdot \frac{25}{99} \cdot \frac{24}{98} \cdot \frac{23}{97} \right) = \\ &= \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 75}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97} \cdot 4. \end{aligned}$$

Questa stessa probabilità si ha se le 3 palline dello stesso colore sono nere o rosse o verdi. Dunque la probabilità che delle 4 palline estratte 3 siano di uno stesso colore e una di colore diverso è la seguente:

$$P(E_4) = 4 \cdot \left(\frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 75}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97} \cdot 4 \right) \approx 17,6\%$$

7. ESERCIZIO 6.

Un bersaglio ha la forma di un esagono regolare e internamente ad esso è inscritto un triangolo i cui vertici sono tre vertici non consecutivi dell'esagono.

Contro il bersaglio si scagliano 5 freccette e tutte lo colpiscono, ma solo alcune colpiscono il triangolo.

Calcolare la probabilità che al più 2 freccette colpiscono il triangolo.

RISOLUZIONE.

La probabilità p che, scagliando una freccetta, questa colpisca il triangolo è uguale al rapporto fra l'area del triangolo e quella dell'esagono.

Ora, con riferimento alla figura sottostante (figura 1), è facile dimostrare che l'area del triangolo è la metà di quella dell'esagono. Si ha pertanto:

$$p = \frac{1}{2}.$$

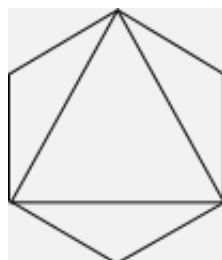


figura 1

Appurato che siamo alle prese con una variabile aleatoria binomiale B , di ordine $n=5$ e di parametro $p=1/2$, suscettibile dei valori 0, 1, 2, la probabilità cercata – cioè la probabilità che, scagliando 5 freccette, 2 al più colpiscano il triangolo – è $P[B \leq 2]$ e si ha:

$$P[B \leq 2] = \sum_{k=0}^2 \binom{5}{k} p^k (1-p)^{5-k} = \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 + \binom{5}{1} p^1 (1-p)^4 + \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} = \frac{1}{2}.$$

8. ESERCIZIO 7.

Quello che propongo adesso, più che un esercizio, è un vero e proprio problema. È stato assegnato nel 1974 ai candidati agli esami di ammissione alla Scuola Normale di Pisa.

Un sacchetto contiene 48 palline di diversi colori: bianche, rosse e nere. La probabilità che, estraendo contemporaneamente due palline, esse siano entrambe bianche è doppia rispetto alla probabilità che, estraendo contemporaneamente tre palline, esse siano tutte rosse. Quante sono le palline nere nel sacchetto?

RISOLUZIONE.

Indichiamo con B , R , N rispettivamente il numero delle palline bianche contenute nel sacchetto, quello delle palline rosse e quello delle palline nere. Deve essere naturalmente:

$$B > 0, \quad R > 0, \quad N > 0, \quad B + R + N = 48.$$

Calcoliamo la probabilità P_B che, estraendo contemporaneamente due palline, esse siano entrambe bianche. Lo facciamo servendoci della probabilità condizionata. Si ha:

$$P_B = P(B) \cdot P(B|B) = \frac{B}{48} \cdot \frac{B-1}{47}.$$

Calcoliamo la probabilità P_R che, estraendo contemporaneamente tre palline, esse siano tutte rosse. Si ha:

$$P_R = P(R) \cdot P(R|R) \cdot P(R|R, R) = \frac{R}{48} \cdot \frac{R-1}{47} \cdot \frac{R-2}{46}.$$

Siccome $P_B = 2 P_R$ allora deve risultare:

$$\frac{B}{48} \cdot \frac{B-1}{47} = 2 \cdot \frac{R}{48} \cdot \frac{R-1}{47} \cdot \frac{R-2}{46},$$

da cui, dopo aver semplificato, segue:

$$(1) \quad 23 B (B-1) = R (R-1) (R-2).$$

Questa uguaglianza è possibile se e solo se uno dei fattori al secondo membro ammette, come fattore primo, il numero 23. Poiché però è $R < 48$, il fattore potrebbe ancora ammettere, come fattore primo, anche il numero 2. In tal caso potrebbe essere $R=46$ oppure $R-1=46$ oppure infine $R-2=46$.

- Se fosse $R=46$ sarebbe $B < 48-46$ cioè $B < 2$.
- Se fosse $R-1=46$ e quindi $R=47$, sarebbe $B < 48-47$ cioè $B < 1$.
- Se fosse $R-2=46$ e quindi $R=48$, sarebbe $B < 48-48$ cioè $B < 0$.

In nessuno dei tre casi la precedente equazione (1) sarebbe soddisfatta.

Dobbiamo desumere che 23 è il solo ed unico fattore primo di uno dei fattori al secondo membro della (1). Allora:

- se fosse $R=23$, dalla (1) seguirebbe $23 B (B-1) = 23 \cdot 22 \cdot 21$ ossia $B (B-1) = 22 \cdot 21$. Questo implica che deve essere $B=22$;
- se fosse $R-1=23$ e quindi $R=24$, dalla (1) seguirebbe $B (B-1) = 24 \cdot 22$, uguaglianza evidentemente impossibile;
- se fosse $R-2=23$ e quindi $R=25$, dalla (1) seguirebbe $B (B-1) = 25 \cdot 24$, e quindi $B=25$; di modo che sarebbe $N=48-(B+R)=48-(23+25)=0$; risultato da scartare poiché $N > 0$.

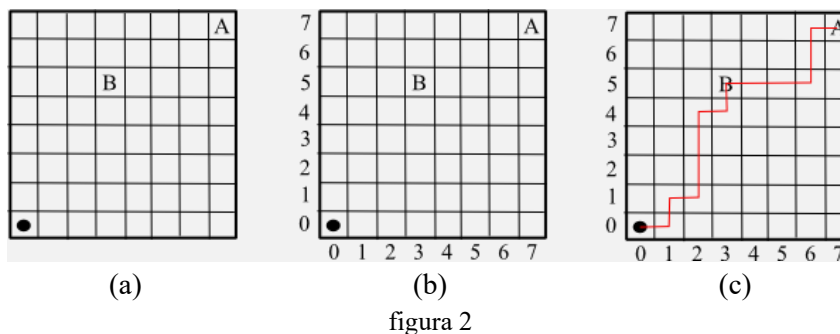
In conclusione, l'unico valore accettabile di R è 23. Nel qual caso si ha: $B=22$ ed $N=3$.

Nel sacchetto vi sono pertanto 3 palline nere.

9. Esercizio 8.

Anche il seguente è un problema, ed è un problema che esce dai canoni tipici degli altri esercizi. È stato assegnato nella sessione ordinaria 2016 degli esami di Stato di Liceo Scientifico. Ci offre lo spunto per alcune considerazioni che possono essere utilizzate in situazioni più generali.

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura (figura 1/a). Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



RISOLUZIONE.

Contrassegniamo le caselle della scacchiera come se fossero quelle di una rappresentazione tabulare, utilizzando la successione 0-1-2-3-4-5-6-7 sia in orizzontale sia in verticale (figura 1/b). In questo modo, alla casella in cui è posta la pedina inizialmente corrisponde la coppia ordinata (0,0), a quella contrassegnata dalla lettera A corrisponde la coppia ordinata (7,7), a quella contrassegnata con la lettera B corrisponde la coppia ordinata (3,5).

Possiamo adesso assimilare la situazione al lancio di una moneta TESTA-CROCE, identificando l'evento "la pedina si sposta di una casella verso destra" con l'evento "esce TESTA" e l'evento "la pallina si sposta di una casella verso l'alto" con l'evento "esce CROCE". Ebbene, lanciando la moneta 14 volte (cioè tante volte quante sono le mosse necessarie per andare dalla casella in basso a sinistra alla casella A), un possibile percorso è quello indicato in figura (figura 1/c) – ed è fra l'altro un percorso passante per B – e che può essere indicato nel modo seguente:

T – C – T – C – C – C – T – C – T – T – T – C – C – T .

Si può notare che ci sono 7 TESTE e 7 CROCI: in realtà accade così per ogni percorso che porti dalla posizione (0,0) alla posizione (7,7). Si tratta di stabilire allora in quanti casi, nei 14 lanci della moneta, escono 7 TESTE (e ovviamente 7 CROCI), ed in quanti di questi casi, giunti all'8° lancio, si presentano 3 TESTE (e ovviamente 5 CROCI).

Ora, è noto dal calcolo combinatorio, che il numero di casi in cui, in n lanci di una moneta, l'evento "esce TESTA" si presenta k volte (per cui l'evento "esce CROCE" si presenta $n-k$ volte) è uguale al numero $P_n^{(k, n-k)}$ delle permutazioni con ripetizione di n oggetti di cui k uguali fra loro e $n-k$ uguali fra loro, vale a dire:

$$P_n^{(k, n-k)} = \frac{n!}{k! (n-k)!} .$$

Numero che, come si sa, è uguale al numero di Pascal $\binom{n}{k}$, che, detto per inciso e come risulta noto, è anche uguale a $\binom{n}{n-k}$.

Ritornando allora al nostro quesito, la probabilità cercata è la seguente:

$$p = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{14}{7}} = \frac{\frac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3}}{\frac{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}} = \frac{7}{429} \approx 1,63\% .$$