

Come modificare l'andamento di una funzione. Termini catastrofici per un grafico .

Nell’articolo di Emilio Ambrisi (<https://www.matmedia.it/una-lezione-di-fine-anno>), viene affrontato in modo innovativo lo studio di una funzione , $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x+2}$, come oggetto di riflessione e discussione e non solo come esercitazione scritta .

Si può cogliere un interessante spunto di approfondimento nell’osservazione :

<<La funzione esponenziale e^{-x+2} agisce come **fattore di smorzamento** del polinomio $x^2 + 1$, impedendone la crescita illimitata e determinando un comportamento asintotico per $x \rightarrow +\infty$
Graficamente, questo produce una curva a campana decrescente>>

Modificare una funzione significa alterarne le caratteristiche, come la pendenza, la concavità o la posizione nel piano cartesiano. Le principali tecniche includono:

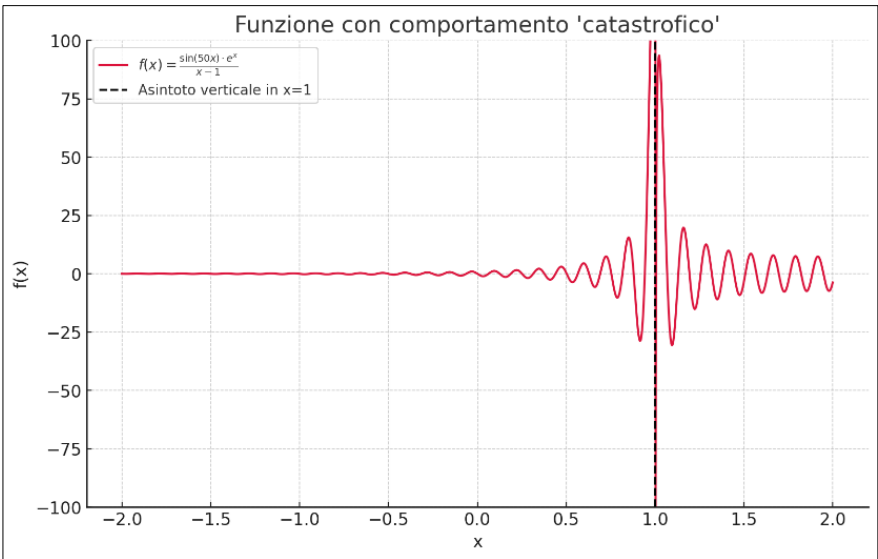
- Trasformazioni Geometriche: Traslazioni, Dilatazioni e Contrazioni, Simmetrie
- Composizione con particolari funzioni (come la funzione “Valore assoluto” e la funzione “Segno”, le quali agiscono alcune proprietà legate alla continuità e alla derivabilità .
- Presenza di fattori o addendi che introducono comportamenti asintotici o influiscono su alcune proprietà come la monotonia o la periodicità.

Con le trasformazioni geometriche è possibile cambiare la posizione del grafico nel riferimento cartesiano o le sue dimensioni; le altre due tecniche , che possono essere etichettate come “catastrofiche”, ne modificano in modo drastico la forma e le proprietà.

Le differenze sono state così sintetizzate da ChatGpt , accompagnate da un esempio grafico di trasformazione catastrofica di una senoide

Differenza chiave

Aspetto	Trasformazioni Geometriche	Modifiche Catastrofiche
Tipo di cambiamento	Regolare, continuo	Discontinuo, improvviso
Stabilità	Invariata	Può cambiare radicalmente
Effetto visivo	Deformazioni prevedibili	Salti, biforcazioni, rotture
Contesto	Matematica classica, geometria	Fisica, psicologia, sistemi dinamici



In un contesto più avanzato, il termine "catastrofe" si riferisce a un modello matematico, sviluppato da René Thom, che descrive come piccole e continue variazioni nei parametri di un sistema, possano causare cambiamenti improvvisi e discontinui nel suo stato. Le "sette catastrofi elementari" (come la cuspide, la coda di rondine, la farfalla) descrivono forme geometriche di questi cambiamenti bruschi e possono essere viste come la formalizzazione matematica di eventi grafici "catastrofici". Ad esempio, un punto di cuspide è un punto in cui il grafico si inverte bruscamente, formando una punta acuta.

Restando in ambito elementare, ci soffermeremo su due esempi di "fattore di smorzamento", significativi per un percorso interdisciplinare di matematica e fisica.

L'esempio classico di fattore di smorzamento esponenziale, presente in molti fenomeni transitori, assume la forma $e^{-\frac{t}{\tau}}$, dove la costante τ , che ha le dimensioni di un tempo, è detta **tempo caratteristico o costante di tempo**.

Si stima che il processo di assestamento, teoricamente di durata infinita, si esaurisca dopo un tempo pari a 4τ o 5τ .

L'evoluzione del fenomeno, pertanto, dipende da τ , ovvero dai valori delle grandezze che concorrono alla sua definizione.

- A. E' spontaneo prendere come primo esempio il moto di un **oscillatore armonico smorzato**. È un perfetto esempio di modifica, non banale, dell'espressione analitica di una funzione, in accordo col significato fisico corrispondente. L'argomento è affrontato nell'ambito della meccanica ma la potenza del metodo delle analogie permette agevolmente il passaggio all'analisi dei circuiti elettrici (LC e LRC),

L'apparato concettuale, che si basa sulla risoluzione di equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti, può essere semplificato ma non trascurato, se si vuole approfondire il legame tra il modello matematico e il fenomeno fisico che si vuole studiare.

E' noto che, in assenza di attrito, il moto di una massa m puntiforme, collegata a una molla di costante elastica K , è un moto armonico semplice descritto da una funzione sinusoidale del tipo

$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, dove la costante ω , che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, rappresenta la pulsazione del moto periodico. Il valore di ω dipende dalle caratteristiche del sistema oscillante, $\left(\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \right)$, mentre il valore di A dipende dall'energia posseduta.

D'altronde, in tutti i fenomeni reali di vibrazione intorno a un punto fisso, intervengono sempre forze passive, spesso schematizzate con una forza diretta in senso contrario al moto e proporzionale alla velocità.

Poiché tali forze, dissipando energia, smorzano il moto oscillatorio, finché il punto oscillante non si ferma nella posizione di equilibrio stabile, nella legge oraria devono essere presenti alcuni termini che inducono un comportamento asintotico all'asse delle ascisse.

Nel caso di un punto materiale di massa m , che si muove su una retta sotto l'azione di una forza di richiamo elastica $F_{el} = -Kx$ e una forza resistente, $F_r = -\beta v$, l'equazione differenziale che traduce la legge fondamentale della dinamica, assume la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} x = 0$, la cui

risoluzione passa attraverso la discussione della realtà delle radici della cosiddetta equazione caratteristica

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{K}{m} = 0 \rightarrow \Delta = \frac{\beta^2 - 4Km}{m^2} \quad \lambda = -\frac{\beta}{2m} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2},$$

L'aspetto più sorprendente è che ai 3 sottocasi, a seconda che tali soluzioni siano reali e distinte (negative), reali e coincidenti o complesse, corrispondono altrettanti scenari per il destino delle oscillazioni

$$\begin{cases} \beta > 2\sqrt{Km} & \text{sovrasmorzamento} \rightarrow x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ \beta = 2\sqrt{Km} & \text{smorzamento critico} \rightarrow x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} (A_1 + A_2 t) \\ \beta < 2\sqrt{Km} & \text{sottosmorzamento} \rightarrow A e^{-\frac{\beta}{2m}t} \sin(\omega_s t + \varphi) \end{cases}$$

In tutti e tre i casi si ha: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$, ma la natura del moto dipende dalla relazione fra i tre parametri β, K, m .

Il seguente quadro sintetico, elaborato da ChatGPT, utilizza il parametro $\gamma = \frac{\beta}{2m}$ e lo confronta con ω_0 , in pratica con la frequenza propria dell'oscillatore armonico.

Schema elaborato da ChatGPT-				
Caso	Condizione	Tipo di radici	Oscillazioni	Ritorno all'equilibrio
Sovrasmorzato	$\gamma > \omega_0$	Reali distinte	✗ No	Lento
Criticamente smorzato	$\gamma = \omega_0$	Reali doppie	✗ No	Più veloce possibile
Sottosmorzato	$\gamma < \omega_0$	Complesse	✓ Sì	Esponenzialmente lento

Il caso critico segna una linea di confine tra il sovrasmorzamento e il sottosmorzamento.

Piccole perturbazioni che alterano i valori delle costanti K, m, β portano il sistema dallo smorzamento critico al sovrasmorzamento o al sottosmorzamento (modifiche "catastrofiche" del grafico).

- B. Il secondo esempio affronta un argomento classico nell'introduzione alla Fisica moderna : **la catastrofe ultravioletta**, famoso paradosso della fisica classica, emerso alla fine del XIX secolo nel contesto dello studio della radiazione del corpo nero.

Secondo la fisica classica, in particolare la legge di Rayleigh-Jeans espressa in termini di distribuzione di densità di energia per unità di volume: $u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$, l'energia emessa da un corpo nero dovrebbe aumentare indefinitamente alle alte frequenze (cioè, nell'ultravioletto e oltre). Planck ricavò la sua legge $u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ mediante un'ingegnosa interpolazione tra la formula di Rayleigh-Jeans valida per le basse frequenze e una formula di Wien, valida per le alte frequenze, in cui $u(\nu, T)$ risultava proporzionale a ν^3 e a un fattore di smorzamento esponenziale. La legge proposta da Planck coincide con la legge classica a basse frequenze; decresce, altresì, esponenzialmente alle alte frequenze, evitando così la "catastrofe", grazie alla presenza di un fattore di smorzamento.

Per una corretta combinazione delle grandezze coinvolte (dal punto di vista dimensionale) era necessaria una nuova costante avente le dimensioni di un'azione $[energia] \cdot [tempo]$

Il suo valore , affinché la legge trovata fosse in perfetto accordo con i dati sperimentali, doveva avere un valore pari a $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

L'apparato teorico introduceva ,però .un'ipotesi che andava contro i principi fondamentali della fisica classica. Planck postulò che l'energia non potesse essere emessa o assorbita in modo continuo, ma solo in pacchetti discreti, che chiamò "quanti", aventi energia proporzionale alla frequenza, $E = h\nu$.

E' evidente che i tentativi di determinare una formula coerente con i principi teorici e i risultati sperimentali , offrono vari spunti didattici sia per la matematica che per la fisica, in particolare per il passaggio dall'insegnamento dei temi canonici della Fisica classica ad alcuni argomenti di Fisica moderna.

Di solito questo passaggio è caratterizzato da un cambiamento metodologico che dal quantitativo si avvicina ad un qualitativo spinto . Pertanto, discutere una formula , manipolarla in modo da renderla coerente con il grafico sperimentale e con l'analisi dimensionale, può essere un efficace compromesso fra i due paradigmi.

Seguono gli articoli di approfondimento

- **“La matematica del moto oscillatorio smorzato”**- I tre scenari classici: sottosmorzato, critico e sovrasmorzato
- **“Osservazioni sulle applicazioni pratiche dello smorzamento critico** (conversazione con GEMINI)
- **“Una modifica catastrofica per evitare una catastrofe”** Il problema della radiazione del corpo nero e la legge di Planck.