

La matematica del moto oscillatorio smorzato.

Il **moto oscillatorio smorzato** è un tipo di moto in cui un sistema oscillante (come una molla con una massa) perde energia nel tempo a causa di forze dissipative, come l'attrito o la resistenza dell'aria.

Nel caso di un punto materiale di massa m , che si muove su una retta sotto l'azione di una forza di richiamo elastica e una forza resistente, l'equazione fondamentale della dinamica si traduce nell'equazione differenziale

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - \beta \frac{dx}{dt} \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} x = 0$$

dove $x(t)$ è la posizione della massa al tempo t , sotto le condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $v(0) = v_0$

Oltre alla massa m del corpo, influiscono sulla tipologia delle soluzioni i valori delle costanti K e β , le quali hanno dimensioni, rispettivamente $[M T^{-2}]$ e $[M T^{-1}]$.

La coerenza tra i risultati matematici e il corrispondente fenomeno fisico rappresenta un'interessante testimonianza del ruolo fondamentale delle equazioni differenziali nei modelli matematici della realtà.

Casi limite

1. Se il coefficiente β , e quindi lo smorzamento, è trascurabile, ritroviamo l'equazione differenziale $m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$ che definisce un moto armonico di pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

dove A è la massima elongazione

2. In presenza di uno smorzamento molto grande diventa trascurabile l'azione della forza elastica. Pertanto l'equazione differenziale si riduce a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m} v$$

La seconda espressione rappresenta un'equazione differenziale a variabili separabili la cui soluzione è $v = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$, dove v_0 è la velocità posseduta dal punto all'istante $t = 0$

La velocità del punto materiale diminuisce esponenzialmente e si annulla in un tempo teoricamente infinito.

Per passare allo spazio percorso in un tempo t , supponendo che la posizione iniziale sia

$$x(0) = x_0, \text{ basta calcolare } \Delta x = v_0 \int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}z} dz = v_0 \left(-\frac{m}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{m}{\beta} \right)$$

$$x(t) = v_0 \frac{m}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) + x_0$$

Il punto materiale si muove di moto decelerato e **dopo un tempo sufficientemente lungo** si ferma ad una distanza dal punto iniziale pari a $v_0 \frac{m}{\beta}$, quantità che, come si può verificare, ha le dimensioni di uno spazio.

Il termine $e^{-\frac{\beta}{m}t}$ un esempio classico di fattore di smorzamento esponenziale, $e^{-\frac{t}{\tau}}$, dove la costante τ è detta tempo caratteristico o costante di tempo.

Si stima che il processo di assestamento, teoricamente di durata infinita, si esaurisca dopo un tempo pari a 4τ o 5τ .

Nel caso generale, diverso dai due casi limite, si può dimostrare che i casi da studiare sono 3, a seconda che risulti :

$$\begin{cases} \beta > 2\sqrt{Km} & \text{sovrasmorzamento} \\ \beta < 2\sqrt{Km} & \text{sottosmorzamento} \\ \beta = 2\sqrt{Km} & \text{smorzamento critico} \end{cases}$$

Le costanti m e K caratterizzano, ad esempio, un sistema massa-molla.

La quantità $\sqrt{Km}$, uguale al prodotto $m\omega$, ha le stesse dimensioni di β .

A causa delle resistenze passive il moto non potrà essere armonico ma la costante ω continua ad avere un ruolo significativo insieme al parametro $\gamma = \frac{\beta}{2m}$, avente dimensioni $[T^{-1}]$ come ω , detto coefficiente di smorzamento.

Le tre condizioni possono essere scritte anche nella forma

$$\begin{cases} \beta > 2m\omega & \text{sovrasmorzamento} \\ \beta < 2m\omega & \text{sottosmorzamento} \\ \beta = 2m\omega & \text{smorzamento critico} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \gamma > \omega & \text{sovrasmorzamento} \\ \gamma < \omega & \text{sottosmorzamento} \\ \gamma = \omega & \text{smorzamento critico} \end{cases}$$

Per un'analisi più approfondita occorre determinare le soluzioni dell'equazione differenziale che caratterizza il moto.

Soluzione dell'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti

$$x'' + \frac{\beta}{m}x' + \frac{K}{m}x = 0 \quad \text{ovvero} \quad x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 0$$

Il segno del discriminante dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$ determina la tipologia delle funzioni che risolvono l'equazione differenziale

$$\frac{\Delta}{4} = \gamma^2 - \omega^2 \rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 & \gamma > \omega \\ \Delta = 0 & \gamma = \omega \\ \Delta < 0 & \gamma < \omega \end{cases}$$

1. se $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$ ammette le due radici reali distinte λ_1, λ_2 (entrambe negative) l'equazione differenziale ammette come soluzioni : $x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$

$$\text{dove } \lambda_1 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

2. se $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$ ammette due radici reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda = -\gamma$ allora l'equazione differenziale ammette le soluzioni : $x(t) = e^{\lambda t}(A_1 + A_2 t) = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t)$

3. se $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$ ammette le due radici complesse coniugate $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$,

l'equazione differenziale ammette come soluzioni $x(t) = e^{ax}(A_1 \cos(bt) + A_2 \sin(bt))$

con $a = -\gamma$, $b = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$.

Introducendo le nuove costanti A e φ , la legge oraria si può scrivere nella forma

$$\text{ovvero } A e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \varphi)$$

In tutti i risultati compare un fattore di smorzamento esponenziale e la natura del moto dipende dalla relazione fra i tre parametri β, K, m

Definito un parametro di smorzamento adimensionale $\zeta = \frac{\beta}{2\sqrt{Km}}$, si ha

- $\zeta > 1$ moto sovrasmorzato
- $\zeta = 1$ smorzamento critico
- $\zeta < 1$ moto sottosmorzato

Analisi dei 3 casi

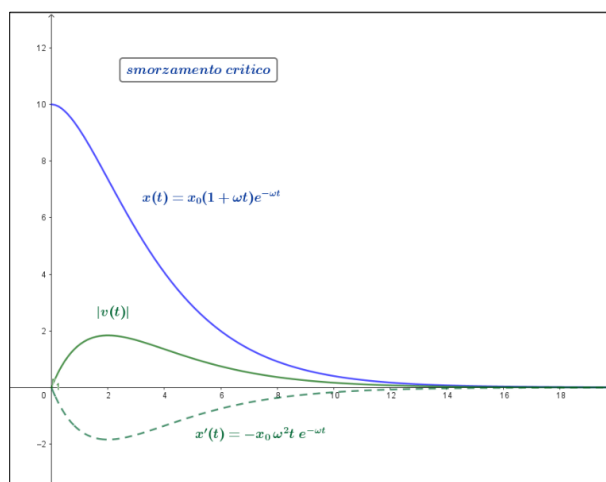
$$\text{Caso critico } \beta_c = 2\sqrt{Km} \rightarrow \beta_c = 2m\omega \rightarrow \gamma_c = \omega$$

$$x(t) = e^{-\omega t}(A_1 + A_2 t) \quad x'(t) = e^{-\omega t}(-\omega A_1 + A_2 - A_2 \omega t)$$

Imponendo le condizioni $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$, si imposta il sistema $\begin{cases} x_0 = A_1 \\ 0 = -\omega A_1 + A_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = \omega x_0 \end{cases}$

Si perviene all'equazione $x(t) = x_0 \left(1 + \frac{\beta_c}{2m} t\right) e^{-\frac{\beta_c}{2m} t}$ ovvero

$x(t) = x_0(1 + \omega t) e^{-\omega t}$ prodotto di un termine lineare per un esponenziale decrescente.



La derivata prima è $x'(t) = -x_0\omega^2 \cdot e^{-\omega t}$ con

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$$

Se la massa viene allontanata dalla posizione O di equilibrio, a una distanza pari a x_0 , e poi abbandonata sotto l'azione della forza elastica e delle resistenze passive, il sistema non compie oscillazioni ma tende a ritornare in O, senza mai oltrepassarlo. Si ferma in O dopo un tempo teoricamente infinito.

La velocità è diretta sempre verso O e il suo modulo aumenta inizialmente, raggiunge un massimo e poi decade con lo stesso fattore di smorzamento

Il fattore di smorzamento è $e^{-\frac{\beta_c}{2m} t}$ e la sua costante di tempo è $\tau_c = \frac{2m}{\beta_c} = \frac{1}{\omega}$

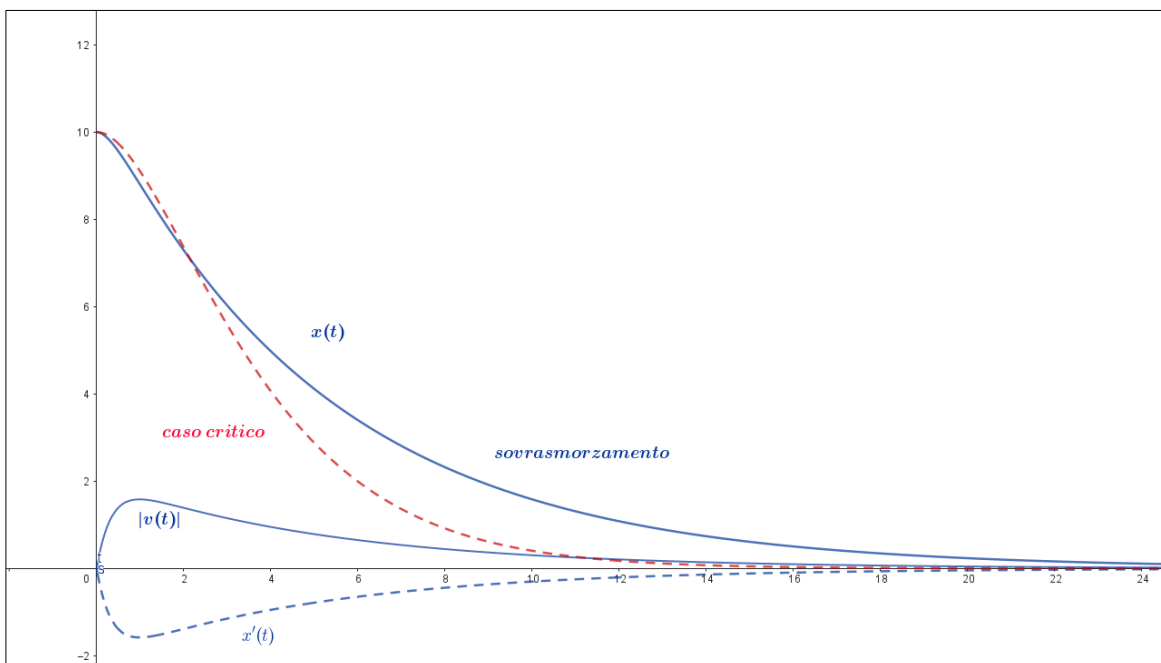
Moto sovrasmorzato $\beta > 2\sqrt{Km} \rightarrow \beta > 2m\omega = \beta_c \rightarrow \gamma > \omega$

La funzione $x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$, con $\lambda_2 > \lambda_1$, è una sovrapposizione di esponenziali decrescenti, essendo negativi entrambi gli esponenti.

Imponendo le condizioni iniziali, il sistema $\begin{cases} x_0 = A_1 + A_2 \\ 0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \end{cases}$

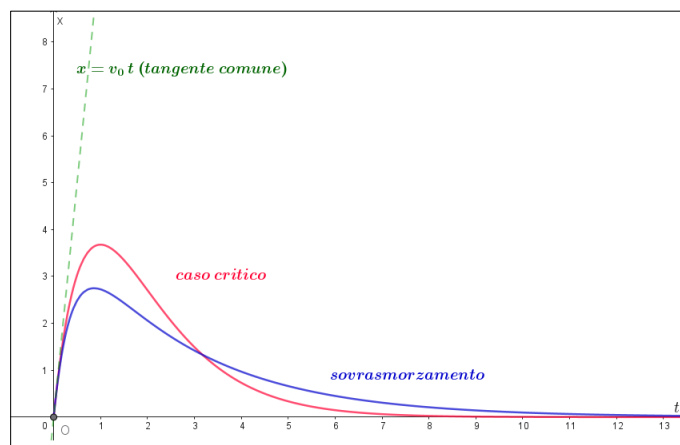
$$\text{fornisce le soluzioni} \begin{cases} A_1 = \frac{\lambda_2 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ A_2 = \frac{-\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \rightarrow x'(t) = \frac{x_0 \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \text{ con } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$$



A livello qualitativo valgono le stesse considerazioni del caso critico

Se le condizioni iniziali sono, invece, $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$ i due grafici assumono una forma diversa, evidenziando una crescita iniziale



Il confronto grafico tra le due leggi orarie suggerisce che ,a parità di ω , lo smorzamento critico è “più veloce” e il sistema torna in equilibrio in un tempo minore rispetto al moto sovrasmorzato

Giustificazione

Nel moto sovrasmorzato, le costanti di tempo dei due fattori di smorzamento sono

$$\tau_1 = \frac{1}{|\lambda_1|} \quad \text{e} \quad \tau_2 = \frac{1}{|\lambda_2|} \quad \text{con} \quad \tau_2 > \tau_1$$

Il comportamento a lungo termine è dominato dal termine più lento; pertanto, confrontiamo τ_2

con $\tau_c = \frac{1}{\omega}$, ovvero $|\lambda_2|$ con ω .

Osserviamo che $|\lambda_2| = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega$ dove $\zeta > 1$

La disuguaglianza $|\lambda_2| < \omega$ è verificata se $\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} < 1$ **ovvero** se $\zeta - 1 < \sqrt{\zeta^2 - 1}$
Essendo i termini della disuguaglianza entrambi positivi possiamo passare ai quadrati

$$(\zeta - 1)^2 < \zeta^2 - 1 = (\zeta - 1)(\zeta + 1) \quad \text{Vera per } \zeta > 1$$

$$\text{Essendo, pertanto,} \quad |\lambda_2| < \omega \rightarrow \tau_2 > \frac{1}{\omega} = \tau_c$$

il processo di assestamento nel caso sovrasmorzato avviene in un tempo maggiore rispetto al caso critico

Moto sottosmorzato $\beta < 2\sqrt{Km} \rightarrow \beta < 2m\omega = \beta_c \rightarrow \gamma < \omega$

La presenza di radici complesse dell'equazione caratteristica introduce, accanto al fattore esponenziale decrescente, un fattore oscillante :

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \varphi) \rightarrow x(0) = A \sin \varphi$$

$$x'(t) = A e^{-\gamma t} \left[\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) - \gamma \cdot \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right] \rightarrow x'(0) = A \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

Se le condizioni iniziali sono $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$ si ha $\varphi = 0$ $A = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}$

La legge oraria sarà

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) = \frac{v_0}{\omega_s} e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t) \quad (\text{moto oscillatorio smorzato})$$

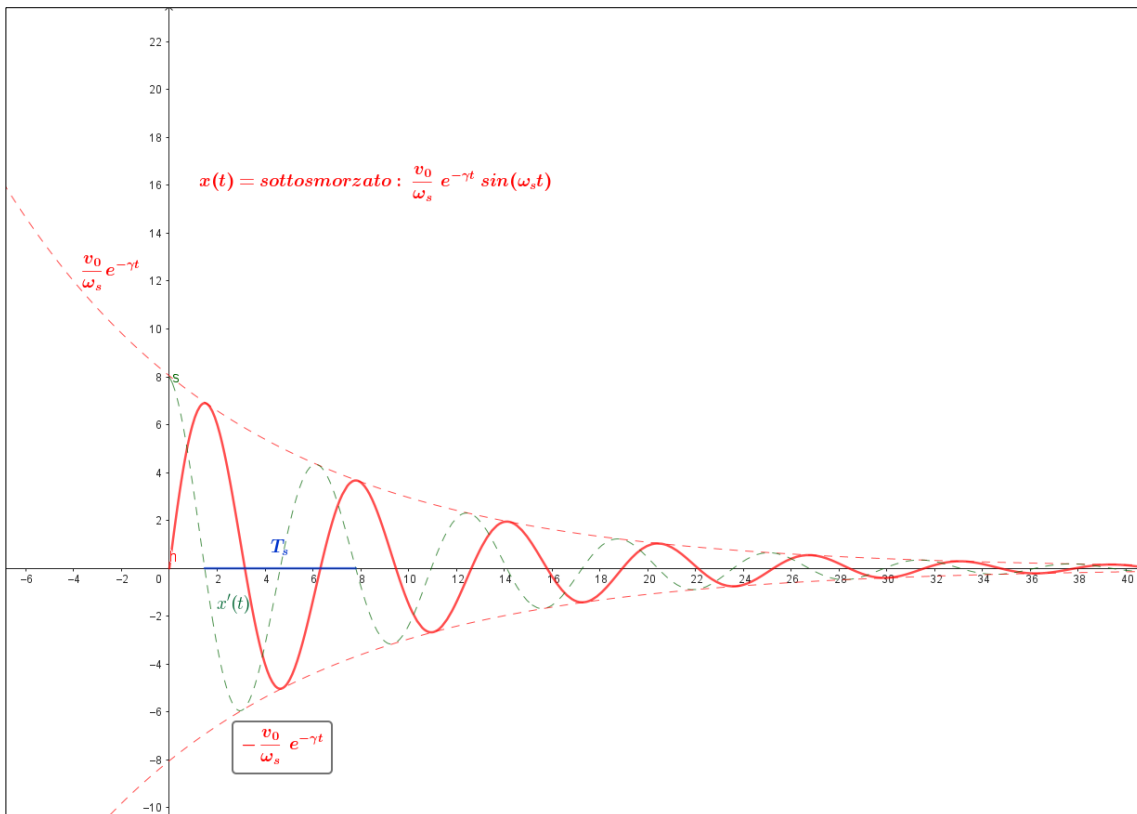
dove $\omega_s = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} < \omega$ è la pulsazione .

Non si può definire un periodo tale che $x(t + T) = x(t)$ ma, come si può verificare,

posto $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$ (uguale alla distanza temporale tra due massimi), si ha

$$x(t + T_s) = e^{-\gamma T_s} x(t)$$

$$\frac{x(t + T_s)}{x(t)} = \frac{e^{-\gamma(t+T_s)} \sin\left(\omega_s t + \omega_s \frac{2\pi}{\omega_s}\right)}{e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t)} = \frac{e^{-\gamma t} \cdot e^{-\gamma T_s} \cdot \sin(\omega_s t)}{e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t)} = e^{-\gamma T_s}$$

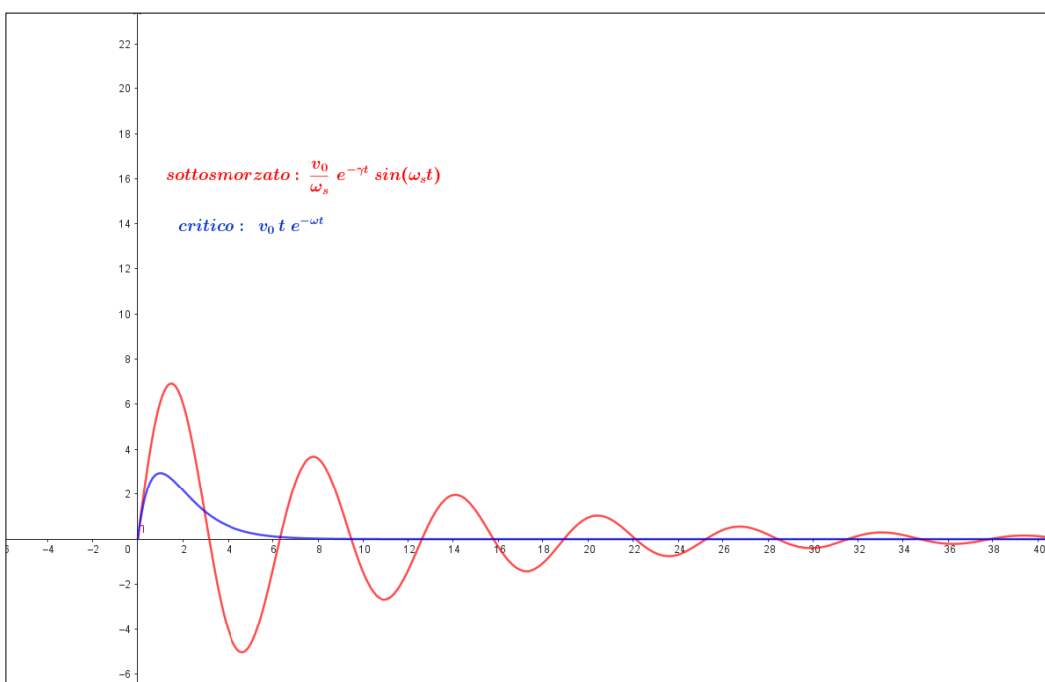


Il grafico resta involuppato tra due funzioni esponenziali che tendono a 0 se $t \rightarrow +\infty$

$$-\frac{v_0}{\omega_s} e^{-\gamma t} \leq \frac{v_0}{\omega_s} e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t) \leq \frac{v_0}{\omega_s} e^{-\gamma t}$$

Pertanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$

Confronto col caso critico



Il fattore di smorzamento $e^{-\gamma t}$ ha una costante di tempo uguale a $\frac{1}{\gamma} > \frac{1}{\omega}$

Pertanto, poiché anche nel caso sottosmorzato il processo di assestamento avviene in un tempo maggiore rispetto al caso critico, quest'ultimo si conferma come il caso di smorzamento più veloce.

Schema elaborato da ChatGPT-				
Caso	Condizione	Tipo di radici	Oscillazioni	Ritorno all'equilibrio
Sovrasmorzato	$\gamma > \omega_0$	Reali distinte	✗ No	Lento
Criticamente smorzato	$\gamma = \omega_0$	Reali doppie	✗ No	Più veloce possibile
Sottosmorzato	$\gamma < \omega_0$	Complesse	✓ Sì	Esponenzialmente lento