

a)

$$f(x) = p(x) \cdot e^{p(x)}$$

Considerando gli “zeri” della funzione, possiamo scrivere:

$$f(x) = 0 \leftrightarrow p(x) = 0 \rightarrow p(x) = ax(x-1)$$

Il segno di $f(x)$ è quello di $p(x) = ax(x-1)$, essendo $e^{p(x)}$ sempre positiva. Dal grafico si deduce che $a < 0$, infatti in tal caso la disequazione $ax(x-1) > 0$ è verificata per $0 < x < 1$.

Condizione:

$$f'(\varphi) = 0, \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$f'(x) = p'(x) \cdot e^{p(x)} + p(x) \cdot e^{p(x)} \cdot p'(x) = p'(x) \cdot e^{p(x)} (p(x) + 1)$$

$$f'(x) = a(2x-1) \cdot e^{ax(x-1)} \cdot (ax^2 - ax + 1)$$

$$f'(\varphi) = 0 \leftrightarrow a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + 1 = 0$$

Risolvendo l'equazione si ottiene $a = -1$

Quindi

$$p(x) = -x(x-1) = -x^2 + x$$

$$f(x) = (-x^2 + x) \cdot e^{-x^2+x}$$

Funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

Considero

$$g(x) = q(x) \cdot e^{p(x)} = q(x) \cdot e^{-x^2+x}$$

Con

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$

(Per comodità utilizzo ancora “a” come coefficiente di x^2)

Condizioni:

$$*g(-\varphi) = 0 \leftrightarrow q(-\varphi) = 0$$

Il punto $A(0,1)$ appartiene alla curva γ_2 , quindi

$$g(0) = 1 \leftrightarrow q(0) \cdot e^{p(0)} = 1 \leftrightarrow c = 1$$

Il punto $A(0,1)$ è un punto di massimo relativo, quindi

$$g'(0) = 0$$

$$g'(x) = (2ax + b) \cdot e^{-x^2+x} + (ax^2 + bx + c) \cdot e^{-x^2+x} \cdot (-2x + 1)$$

$$g'(0) = b + c = 0 \rightarrow b = -c = -1$$

Sostituendo i valori trovati si ha che:

$$q(x) = ax^2 - x + 1$$

Considero la condizione *

$$q(-\varphi) = a\varphi^2 + \varphi + 1 = 0$$

$$a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = 0 \rightarrow a = -1$$

In definitiva:

$$q(x) = -x^2 - x + 1$$

$$g(x) = (1 - x - x^2) \cdot e^{-x^2+x}$$

Funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

b)

$$f(x) = (-x^2 + x) \cdot e^{-x^2+x}$$

Il segno e gli zeri di $f(x)$ si riconducono a quelli di $p(x)$

$$f(x) > 0 \text{ per } 0 < x < 1$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x < 0 \vee x > 1$$

$$f(x) = 0 \text{ per } x = 0 \vee x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^2 + x) \cdot e^{-x^2+x}$$

Forma indeterminata $\infty \cdot 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^2 + x) \cdot e^{-x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2 + x}{e^{x^2-x}} = 0$$

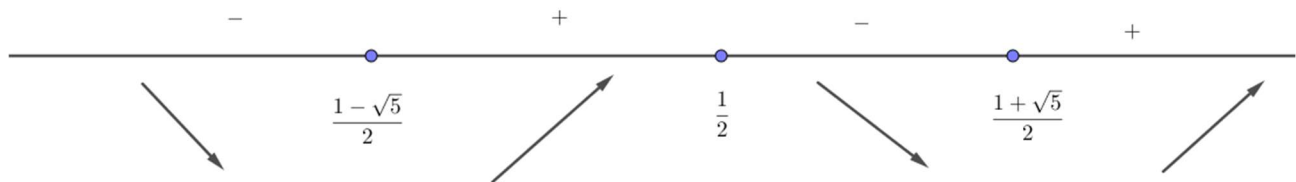
Quindi la retta

$$y = 0$$

è asintoto orizzontale.

$$f'(x) = (-2x + 1) \cdot e^{-x^2+x} \cdot (-x^2 + x + 1) = (2x - 1) \cdot (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x^2+x}$$

Studio del segno:



Due punti di minimo relativi e assoluti, un punto di massimo relativo e assoluto.

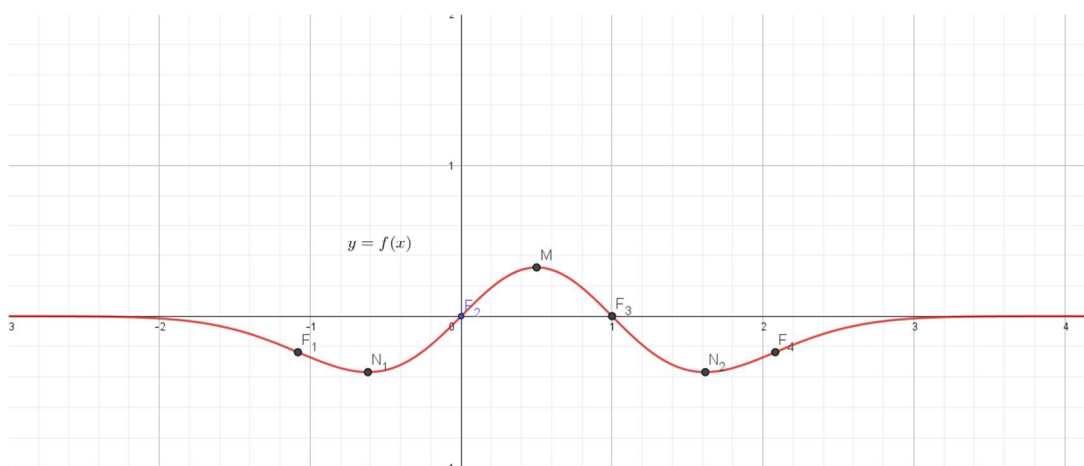
$$f''(x) = x \cdot (1 - x) \cdot (4x^2 - 4x - 9) \cdot e^{-x^2+x} > 0$$

Studio del segno:



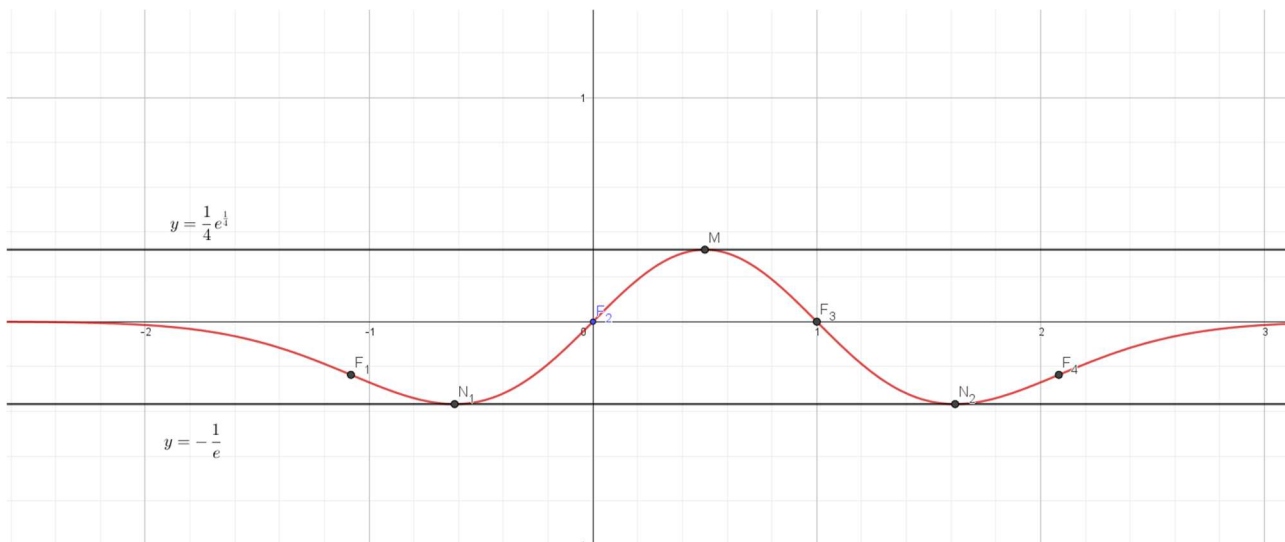
Quattro punti di flesso.

Grafico



L'ordinata dei punti di minimo assoluti è: $y = -\frac{1}{e}$

L'ordinata del punto di massimo assoluto è: $y = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[4]{e}$



$$Im(f(x)) = \left[-\frac{1}{e} ; \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} \right]$$

Numero intersezioni con la retta $y = k$ e numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$

$k < -\frac{1}{e}$ Nessuna intersezione (nessuna soluzione reale)

$k = -\frac{1}{e}$ Due intersezioni (due soluzioni reali doppie coincidenti: nei due punti di tangenza)

$-\frac{1}{e} < k < 0$ Quattro intersezioni (quattro soluzioni reali e distinte)

$0 \leq k < \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}}$ Due intersezioni (due soluzioni reali e distinte)

$k = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}}$ Una intersezione (due soluzioni reali e coincidenti)

$k > \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}}$ Nessuna intersezione (nessuna soluzione)

Simmetria rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$

Equazione della simmetria assiale:

$$\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' \end{cases}$$

Sostituendo in

$$y = (-x^2 + x) \cdot e^{-x^2+x}$$

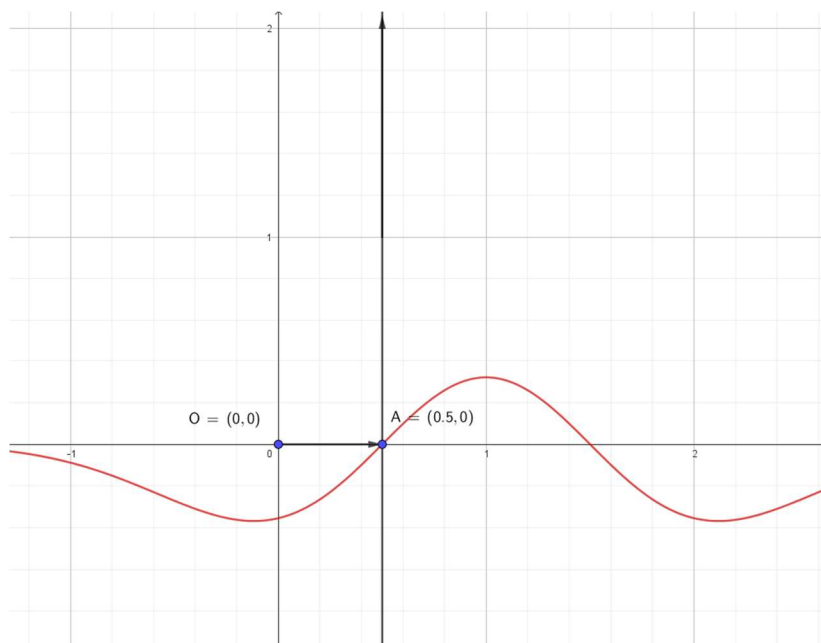
Si ha:

$$y' = (-(x' - 1)^2 + (x' - 1)) \cdot e^{-(x'-1)^2+(x'-1)}$$

$$y' = (-x'^2 + x') \cdot e^{-x'^2 + x'}$$

Che è proprio l'equazione di partenza, quindi la curva è simmetrica rispetto alla retta $x = \frac{1}{2}$.

Si perviene allo stesso risultato effettuando una traslazione dell'asse delle ordinate, oppure traslando la curva.

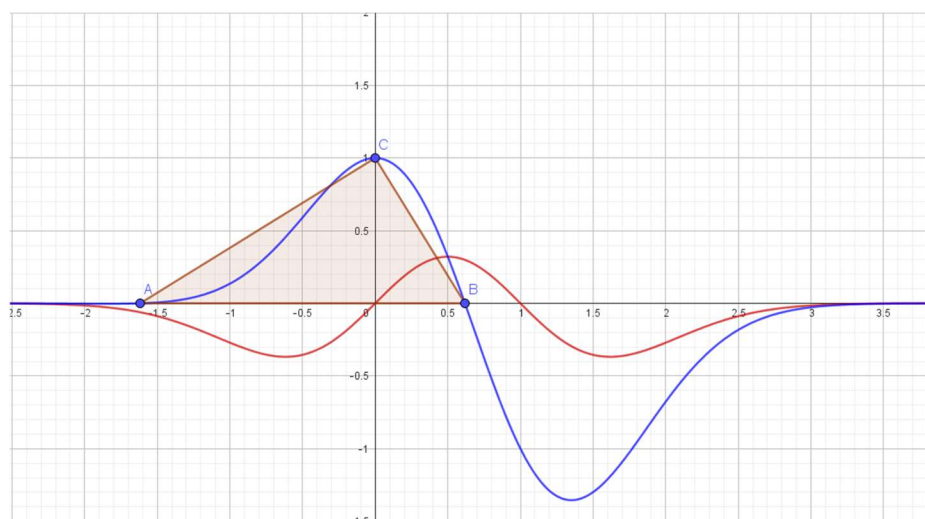


c)

$$g(x) = (1 - x - x^2) \cdot e^{-x^2 + x}$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$g\left(\frac{1}{\varphi}\right) = g\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2\right) \cdot e^{-\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)} = 0$$



$$A(-\varphi, 0) \quad C(0,1) \quad B\left(\frac{1}{\varphi}, 0\right)$$

$$m(AC) = \frac{1}{\varphi} \quad ; \quad m(BC) = \frac{1}{-\frac{1}{\varphi}} = -\varphi \rightarrow m(AC) \cdot m(BC) = -1$$

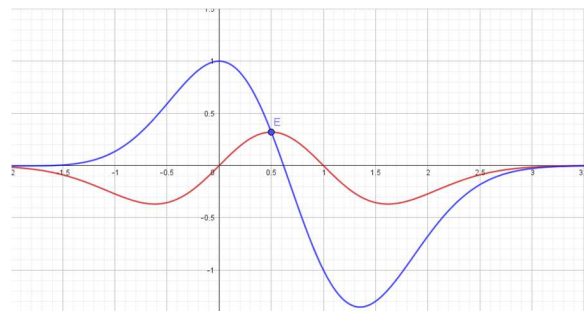
Quindi il triangolo ABC è rettangolo.

Intersezione delle due curve

$$\begin{cases} y = p(x) \cdot e^{p(x)} \\ y = q(x) \cdot e^{p(x)} \end{cases} \rightarrow p(x) = q(x)$$

$$-x^2 + x = -x^2 - x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

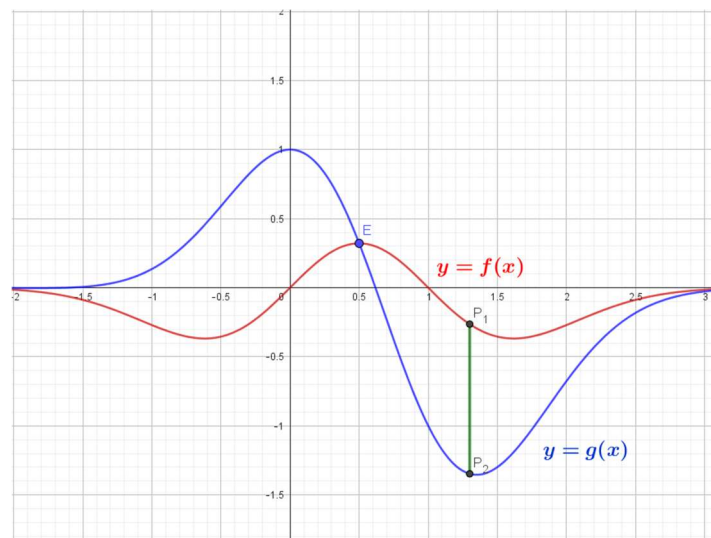
$$y = p(x) \cdot e^{p(x)} \rightarrow y = \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt[4]{e}$$



$$P_1(x, f(x)); \quad P_2(x, g(x))$$

$$P_1 P_2 = d(x) = f(x) - g(x) \quad e \quad x \geq \frac{1}{2}$$

$$x \geq \frac{1}{2} \rightarrow f(x) \geq g(x)$$



$$d(x) = (2x - 1) \cdot e^{-x^2+x}$$

$$d'(x) = (-4x^2 + 4x + 1) \cdot e^{-x^2+x} > 0$$

Si ha il massimo assoluto per

$$x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \rightarrow d(\text{masima}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{e}}$$

d) Calcolo area

$$A(R) = \int_0^{1/2} (g(x) - f(x)) dx$$

$$A(R) = \int_0^{1/2} (1 - 2x) \cdot e^{-x^2+x} dx = [e^{-x^2+x}]_0^{1/2} = \sqrt[4]{e} - 1$$

$$A(R') = \int_{1/2}^t (f(x) - g(x)) dx$$

con $t \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} A(R') &= \int_{1/2}^t (2x - 1) \cdot e^{-x^2+x} dx = \int_t^{1/2} (-2x + 1) \cdot e^{-x^2+x} dx \\ &= [e^{-x^2+x}]_t^{1/2} = \sqrt[4]{e} - e^{-t^2+t} \end{aligned}$$

$$A(R) = A(R')$$

$$\sqrt[4]{e} - e^{-t^2+t} = \sqrt[4]{e} - 1 \rightarrow e^{-t^2+t} = 1 \rightarrow t = 0 \vee t = 1$$

Accettabile la soluzione $t = 1$.

