

Una modifica “catastrofica” per evitare una catastrofe

Alla fine del XIX secolo, un'insidiosa crepa si manifestò nel solido edificio della fisica classica: la spiegazione della radiazione emessa da un "corpo nero" portava a un risultato paradossale che metteva in luce alcuni limiti della fisica dell'epoca e aprì la strada a una delle più grandi rivoluzioni scientifiche della storia: la nascita della meccanica quantistica.

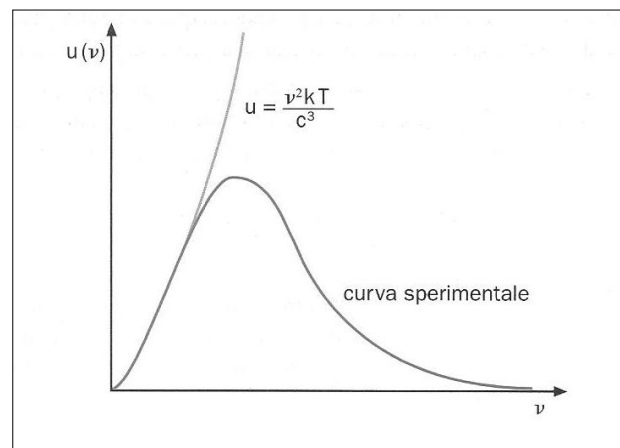
Un corpo nero è un oggetto ideale che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica incidente, a qualsiasi frequenza, senza riflessioni verso l'esterno. Quando è in equilibrio termico, emette radiazione con uno spettro caratteristico (la **radiazione del corpo nero**) che dipende solo dalla sua **temperatura**.

Due fisici, Lord Rayleigh e James Jeans, applicando i principi consolidati della fisica classica (in particolare l'elettromagnetismo di Maxwell e la termodinamica statistica), derivarono una formula, nota come legge di Rayleigh-Jeans, per descrivere lo spettro di emissione del corpo nero. La loro legge, espressa in termini di distribuzione di densità di energia (per unità di volume), è

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \text{ dove}$$

- Le dimensioni di $u(\nu)$ sono

$$\frac{[energia]}{[volume][frequenza]}$$
- ν è la frequenza, misurata in s^{-1}
- T è la temperatura, misurata in K
- k è la costante di Boltzmann, misurata in J/K
- c è la velocità della luce, misurata in ms^{-1}



Questa formula funzionava ragionevolmente per le basse frequenze (luce infrarossa e visibile); per le alte frequenze (nella regione dell'ultravioletto), invece, la curva corrispondente all'interpretazione della fisica classica non solo non si accordava con i risultati sperimentali, ma prevedeva, paradossalmente, un valore infinitamente grande per l'energia totale contenuta nella cavità, a qualsiasi temperatura.

Se, infatti, $u(\nu)$ è la *funzione di distribuzione* della densità di energia della radiazione di un corpo nero, ad un incremento $d\nu$ della frequenza, corrisponde una densità di energia per unità di volume pari a $u(\nu)d\nu$.

L'energia totale corrisponde all'area della regione piana compresa tra la curva e l'asse delle ascisse.

Poiché, nel caso della curva teorica, ad andamento parabolico, la suddetta area tende a un valore infinito, un corpo nero, a qualsiasi temperatura, avrebbe dovuto emettere una quantità infinita di energia, soprattutto alle alte frequenze (raggi ultravioletti).

Questa drammatica discrepanza tra la teoria e le osservazioni sperimentali, che mostravano invece un picco di emissione seguito da un rapido declino verso le alte frequenze, fu battezzata, qualche anno più tardi, "catastrofe ultravioletta" dal fisico Paul Ehrenfest.

La soluzione di questo enigma si deve al fisico tedesco Max Planck che derivò una nuova formula, coerente con i dati sperimentali e in accordo con la legge di Rayleigh-Jeans relativamente alle basse frequenze:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Nella formula compariva una nuova costante fondamentale, la costante h , oggi nota come **costante di Planck**.

Analizzando la legge si può verificare che il primo termine $\frac{8\pi\nu^3 h}{c^3}$ deve avere dimensioni di $\frac{[energia]}{[volume][frequenza]}$, mentre il secondo termine $\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$ è adimensionale. La nuova costante deve avere, pertanto, le dimensioni di un'azione $[energia] \cdot [tempo]$.

Il suo valore, affinché la legge trovata fosse in perfetto accordo con i dati sperimentali, doveva avere un valore pari a $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

*"Assai meno comoda fu l'interpretazione della seconda costante universale della legge di radiazione, che io designai come **quanto elementare di azione**, perché rappresenta il prodotto di un'energia per un tempo). Mentre essa era assolutamente indispensabile [...] sorgevano delle gravi difficoltà quando si cercava di inquadrarla in qualche maniera nella teoria classica (M. Planck, Conferenza del 2 giugno 1920)*

L'apparato teorico introduceva un'ipotesi che andava contro i principi fondamentali della fisica classica. Planck postulò che l'energia non potesse essere emessa o assorbita in modo continuo, ma solo in pacchetti discreti, che chiamò "quanti", aventi energia proporzionale alla frequenza, $E = h\nu$.

Sostanzialmente, la legge di Rayleigh-Jeans, trattava la radiazione all'interno del corpo nero come onde stazionarie prodotte da innumerevoli "oscillatori" atomici sulle pareti della cavità. Un principio fondamentale della termodinamica classica (il teorema di equipartizione dell'energia) afferma che, in un sistema in equilibrio termico, ogni "grado di libertà" (in questo caso, ogni oscillatore) possiede in media la stessa quantità di energia, pari a kT (dove k è la costante di Boltzmann e T è la temperatura). Questo implica che all'aumentare della frequenza ν aumenta anche il numero di modalità e l'energia totale cresce senza limiti → catastrofe ultravioletta

L'ipotesi di energia quantizzata di Planck supera il paradosso cambiando radicalmente l'idea di come l'energia venga scambiata tra materia e radiazione: non in modo continuo, come prevedeva la fisica classica, ma in quanti discreti di energia.

Alle basse frequenze $h\nu \ll kT \rightarrow$ le differenze tra energia quantizzata e continua sono minime e la legge di Planck si avvicina a quella classica.

Alle alte frequenze $h\nu \gg kT$ la probabilità che un'oscillazione riceva energia sufficiente per eccitarsi tende a 0.

Poiché questi oscillatori non vengono attivati, non contribuiscono all'energia totale emessa. L'emissione di energia, quindi, dopo aver raggiunto un picco, crolla rapidamente a zero per le frequenze molto alte, esattamente come osservato sperimentalmente, evitando così la catastrofe ultravioletta.

Tornando alla discussione sulla formulazione matematica delle legge di Planck, osserviamo che, a una determinata temperatura, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} u(\nu, T) = 0$. Il termine

$\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$ è un **fattore di smorzamento**.

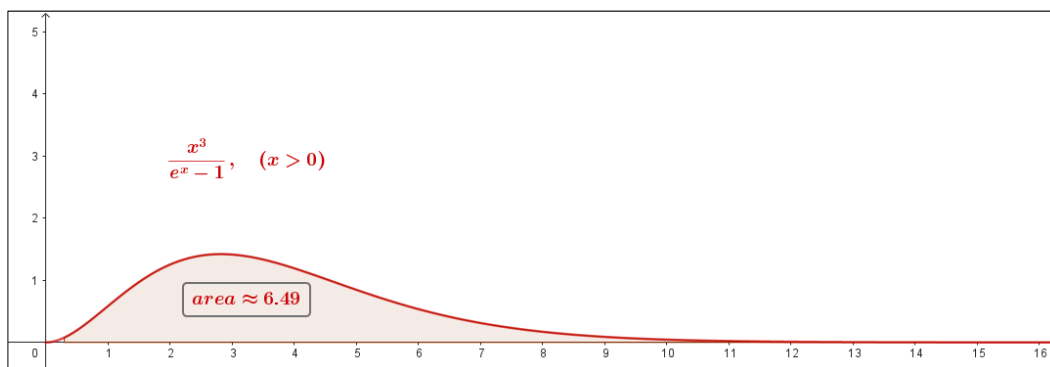
Inoltre, per piccoli valori della frequenza, $u(\nu, T) \cong \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$, in quanto

$$e^{h\nu/kT} \cong 1 + \frac{h\nu}{kT} \rightarrow \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \cong \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} = \frac{kT}{h\nu} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \cong \frac{8\pi\nu^3 h}{c^3} \frac{kT}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT$$

Inoltre l'ordine di infinito del termine esponenziale assicura la convergenza dell'integrale improprio che permette di calcolare l'area sottesa dalla curva.

L'integrale, dopo alcune sostituzioni di variabili, può essere ricondotto al calcolo, mediante metodi numerici, di $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^4}{15} \approx 6,49$



Riferimenti : Battimelli- Stilli-Le vie della Fisica. Vol II Ed. Laterza

L'integrale della funzione di Planck per la radiazione di corpo nero

https://wiki.sissa.it/students/images/b/b2/04_-_integrale.pdf