

PROBLEMA 1

Si consideri la famiglia di funzioni $f_a(x) = (x^2 + 1)e^{ax+1}$, con a parametro reale non nullo, e si indichi con γ_a il grafico di f_a .

- Al variare di a , stabilire il numero degli estremi relativi e dei flessi. Determinare il valore positivo di a in modo che il grafico abbia un flesso a tangente orizzontale.
- Studiare la funzione f_1 e tracciare γ_1 . Spiegare perché f_1 è invertibile in $\mathbb{R}$ e indicare con g la sua funzione inversa. Specificare il dominio di g e determinare $g'(e)$.
- Si consideri la funzione $F(t) = \int_t^0 f_1(x)dx$, con $t \leq 0$. Fornire il significato geometrico della funzione $F(t)$ e verificare che $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 3e$.
- Sia P_a un punto sulla curva γ_a , di ascissa $x < 0$, nonché Q_a ed R_a le sue proiezioni sugli assi coordinati. Determinare, se esiste, il valore del parametro a in corrispondenza del quale l'area del rettangolo $P_a Q_a O R_a$ assume valore massimo se $x = -2$.

Si tratta di una famiglia di funzioni aventi come dominio $\mathbb{R}$, continue e derivabile in $\mathbb{R}$, sempre positive nel dominio.

- Studio del segno della derivata prima.

$$f'_a(x) = e^{ax+1}(ax^2 + 2x + a)$$

Lo studio del segno di $f'_a(x)$ è ricondotto a quello del trinomio $ax^2 + 2x + a$

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - a^2 \quad \text{segno:} \begin{cases} > 0 & \text{se } -1 < a < 1 \wedge a \neq 0 \\ = 0 & \text{se } a = -1 \vee a = 1 \\ < 0 & \text{se } a < -1 \vee a > 1 \end{cases}$$

Se $-1 < a < 1 \wedge a \neq 0$, $f'_a(x) = 0$ per

$$x_{1;2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1-a^2}}{a}$$

dove la curva presenta due estremi relativi.

Precisamente:



Se $a = -1 \vee a = 1$ la curva non presenta punti di massimo o minimo relativo e presenta un punto di flesso a tangente orizzontale in $x = -\frac{1}{a}$, quindi in $x = 1$ (se $a = -1$) $\vee x = -1$ (se $a = 1$).

Se $a < -1 \vee a > 1$ la curva non presenta punti di massimo o minimo relativo o di flesso a tangente orizzontale.

Derivata seconda

$$f_a''(x) = e^{ax+1}(a^2x^2 + 4ax + a^2 + 2)$$

Lo studio del segno di $f_a''(x)$ è ricondotto a quello del trinomio $a^2x^2 + 4ax + a^2 + 2$, che ha la concavità rivolta verso alto $\forall a \neq 0$

$$\frac{\Delta}{4} = a^2(2 - a^2) \quad \text{segno:} \begin{cases} > 0 & \text{se } -\sqrt{2} < a < \sqrt{2} \wedge a \neq 0 \\ = 0 & \text{se } a = -\sqrt{2} \vee a = \sqrt{2} \\ < 0 & \text{se } a < -\sqrt{2} \vee a > \sqrt{2} \end{cases}$$

Quindi la curva presenta due punti di flesso se $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2} \wedge a \neq 0$, nei punti di ascissa:

$$x_{1;2} = \frac{-2a \mp \sqrt{a^2(2 - a^2)}}{a^2}$$

In particolare:

a. se $a = -1$

$$x_{1;2} = \frac{2 \mp 1}{1} \rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 3$$

In $x_1 = 1$ la curva presenta un flesso a tangente orizzontale, come osservato nel punto precedente.

b. se $a = +1$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \mp 1}{1} \rightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = -1$$

In $x_2 = -1$ la curva presenta un flesso a tangente orizzontale, come osservato nel punto precedente.

b) Studio di $f_1(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{x+1}$

Come già osservato è una funzione avente come dominio $\mathbb{R}$, continua e derivabile in $\mathbb{R}$, sempre positiva nel dominio. Non è pari e non è dispari.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) \cdot e^{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1) \cdot e^{x+1}}{x} = +\infty$$

Quindi la curva non presenta asintoti orizzontali od obliqui per $x \rightarrow +\infty$

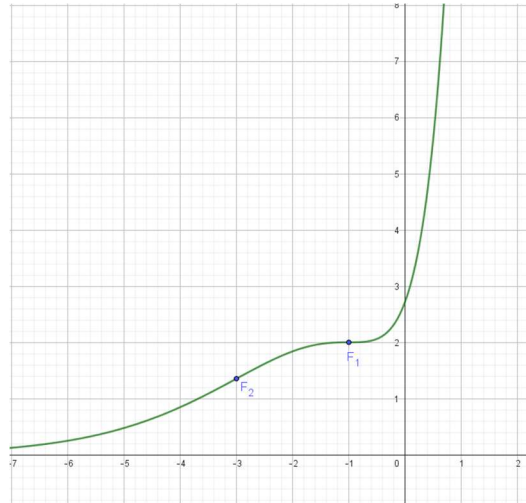
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) \cdot e^{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 1)}{e^{-x-1}} = 0$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \rightarrow -\infty$

$$f_1'(x) = e^{x+1}(x^2 + 2x + 1) = e^{x+1}(x + 1)^2$$

La derivata prima è sempre non negativa e si annulla solo in $x = -1$, quindi la curva è crescente e $F_1(-1; 2)$ è punto di flesso a tangente orizzontale, come visto nel punto precedente. Sempre per il punto precedente la curva presenta un altro punto di flesso in $F_2(-3; 10 \cdot e^{-2})$.

Grafico:



La funzione $f_1(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ è strettamente crescente e quindi è invertibile, la sua funzione inversa

$$g(x): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

Quindi il dominio di $g(x)$ è $\mathbb{R}^+$.

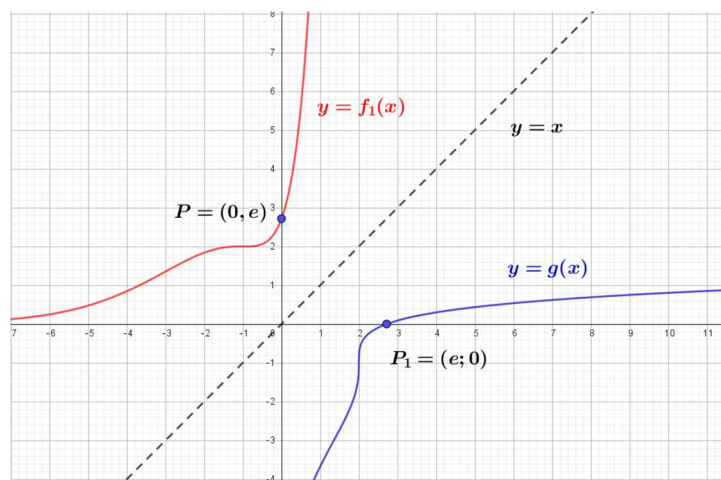
Il suo grafico si ottiene simmetrizzando la curva di equazione $y = f_1(x)$ rispetto alla bisettrice $y = x$.

$$g'(e) = \frac{1}{f_1'(x_0)}$$

Dove x_0 è soluzione dell'equazione: $(x^2 + 1) \cdot e^{x+1} = e$, la soluzione è: $x_0 = 0$

Quindi

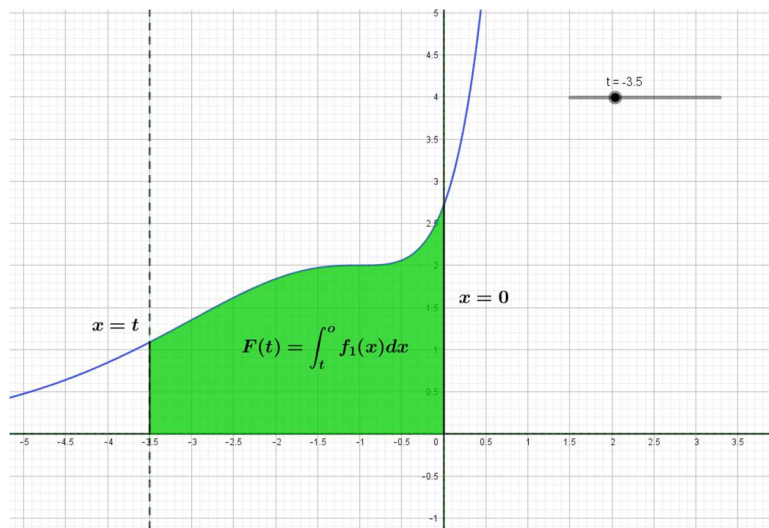
$$g'(e) = \frac{1}{f_1'(0)} = \frac{1}{e}$$



c) Si consideri la funzione:

$$F(x) = \int_t^0 f_1(x) dx ; t \leq 0$$

$F(x)$ rappresenta l'area della zona evidenziata.



Integrando per parti si ha che:

$$\int [(x^2 + 1) \cdot e^{x+1}] dx = (x^2 - 2x + 3)e^{x+1} + c$$

Quindi

$$F(t) = \int_t^0 [(x^2 + 1) \cdot e^{x+1}] dx = 3e - (t^2 - 2t + 3)e^{t+1}$$

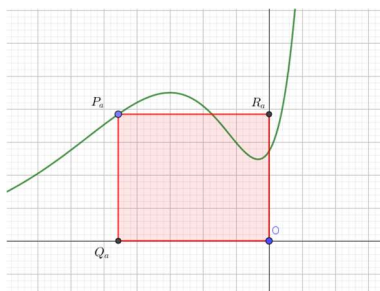
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (t^2 - 2t + 3)e^{t+1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2 - 2t + 3}{e^{-t-1}} = 0$$

Quindi:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 3e$$

d) Sia $P_a(x, f_a(x)) \in \gamma_a$ con $x < 0$.

Il punto appartiene al secondo quadrante, essendo $f_a(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$



$$Q_a O = -x > 0$$

$$O R_a = f_a(x) = (x^2 + 1)e^{ax+1} > 0$$

$$A(x) = -x \cdot (x^2 + 1)e^{ax+1} = (-x^3 - x)e^{ax+1}$$

$$A'(x) = -e^{ax+1}(ax^3 + 3x^2 + ax + 1)$$

Imponiamo che $A'(-2) = 0 \rightarrow a = \frac{13}{10}$

Verifichiamo che per tale valore di a l'area è massima.

Scomponendo con la regola di Ruffini (conosciamo la radice -2) abbiamo che:

$$A'(x) = e^{\frac{13}{10}x+1}(-x-2) \cdot \frac{13x^2 + 4x + 5}{10}$$

Il trinomio $13x^2 + 4x + 5$ è sempre positivo, quindi $A'(x) > 0$ se $-x - 2 > 0$ ovvero se $x < -2$.

Resta così verificato che l'area del rettangolo assume il valore massimo se $x = -2$