

PUNTI SEMPLICI E PUNTI SINGOLARI PER UNA CUBICA

Concetto di molteplicità di intersezione tra una retta r e una curva algebrica C di ordine n

Una retta di equazione $ax + by + c = 0$ e una curva algebrica di equazione $f(x, y) = 0$ si incontrano in un punto $P(x_0, y_0)$ se le coordinate di P sono soluzioni del sistema algebrico costituito dalle due equazioni.

La molteplicità di intersezione di C ed r nel punto P è uguale a $m \leq n$ se (x_0, y_0) è una soluzione di molteplicità m per il sistema stesso.

Intuitivamente : m è il numero di punti di intersezione *infinitamente vicini* a P che "confluiscono" in P .

Esempi:

$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases}$ La retta e la parabola si incontrano nel punto $O(0,0)$ e nel punto $P(1,1)$ con molteplicità uguale a 1 per entrambi.

Ciascuna delle curve di equazione $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ è tangente nell'origine all'asse delle x , ma la molteplicità di intersezione è 2,3,4 rispettivamente.

Un punto P , appartenente ad una curva algebrica di ordine 3, si definisce **semplice** se tutte le rette del fascio di centro P incontrano la curva in altri 2 punti (nel piano proiettivo complesso) eccetto una retta particolare, la retta tangente, la quale assorbe in P almeno 2 intersezioni.

Se una retta generica r del fascio di centro P ha molteplicità di intersezione 2 con la curva, quindi ammette con essa solo un ulteriore punto di intersezione, si dice che P è *punto doppio* e che la cubica è *singolare*.

Al variare di r nel fascio, vi sono due posizioni particolari, eventualmente coincidenti, per le quali anche l'ulteriore punto di intersezione va a coincidere con P stesso. Le rette corrispondenti si dicono *rette tangenti* nel punto doppio.

Si definisce *nodo* un punto doppio in cui le tangenti principali sono due rette distinte, si dice *cuspid* se le tangenti principali sono due rette coincidenti.

Numero di intersezioni tra una retta e una curva algebrica C di ordine n

Nel piano proiettivo complesso una retta e una curva di ordine n si incontrano in n punti, contati con la loro molteplicità, oppure in infiniti punti se la cubica è riducibile e la retta è una sua componente.

Il risultato si generalizza in un importante teorema di Geometria algebrica, il Teorema di Bézout:

Il numero di punti di intersezione tra due curve algebriche C e D prive di componenti comuni è uguale al prodotto dei loro gradi, a patto di contare i punti di intersezione con la loro molteplicità e di considerare le intersezioni *nel piano proiettivo complesso*.

Una conica non degenera non può avere punti doppi : una retta congiungente il punto singolare con qualsiasi altro punto della curva avrebbe un numero di intersezioni superiori a 2 con la curva stessa.

Una *cubica irriducibile* può avere al massimo un punto doppio , in quanto una retta congiungente due punti singolari avrebbe con la curva un numero di intersezioni $n > 3$.

Dal punto di vista dell'Analisi, un punto P su una curva $C: f(x, y) = 0$ è singolare se, in quel punto, si annullano contemporaneamente entrambe le derivate parziali prime del polinomio che definisce la curva.

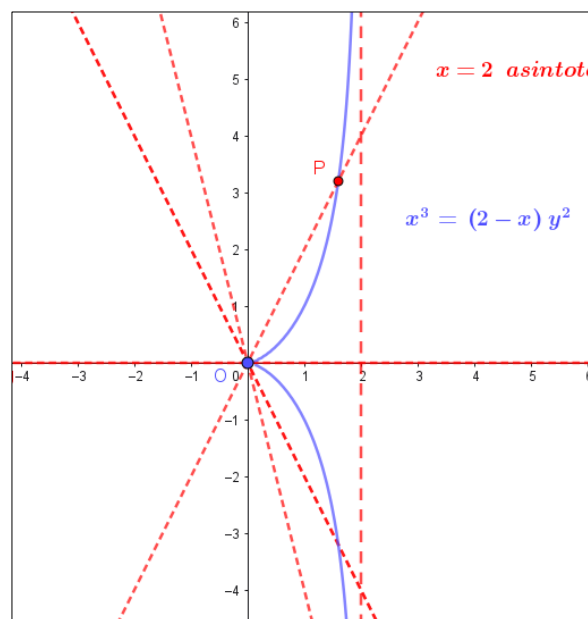
ESERCIZI

1. Verificare che la curva di equazione $x^3 = (2 - x)y^2$ (cissoide di Diocle) ha una cuspidale nel punto $O(0,0)$.

Esplicitando la variabile y si ottengono due funzioni simmetriche rispetto all'asse delle ascisse

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{2-x}}$$

Studiando una delle due funzioni con i consueti metodi dell'Analisi, si può costruire per simmetria il grafico della seconda. L'unione dei due grafici rappresenta la cissoide di Diocle



Una retta del fascio $y = mx$ incontra la curva nel punto O con molteplicità uguale a 2.

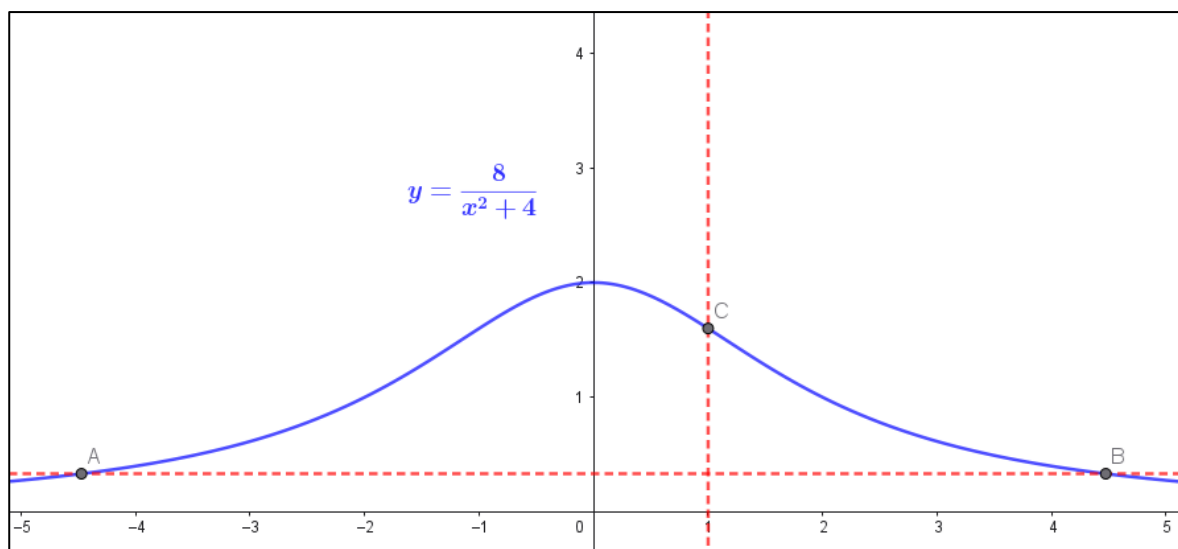
Il terzo punto di intersezione di coordinate $\left(\frac{2m^2}{1+m^2}, \frac{2m^3}{1+m^2}\right)$ va a coincidere con O se $m = 0$

Il punto O è un punto doppio con tangenti tra loro coincidenti (cuspidale).

2. Verificare che la cubica di equazione $y = \frac{8}{x^2+4}$ (versiera di Gaetana Agnesi) possiede due punti impropri. il punto improprio dell'asse x e il punto improprio dell'asse y , essendo il primo un punto semplice e il secondo un punto doppio .

E' possibile seguire due approcci risolutivi

a) Studiando la funzione con i consueti metodi dell'Analisi, si costruisce il suo grafico e riconoscerne alcune proprietà significative,



La curva incontra in due punti reali e distinti le rette del fascio $y = k$ con $k \in]0, 2[$

(la terza intersezione “va all'infinito”)

La retta $y = 2$ è tangente alla curva e la incontra nel punto $(0, 2)$ con molteplicità uguale a 2

L'asse delle x è asintoto orizzontale e non ha intersezioni al finito

La curva incontra in un sol punto le rette del fascio $x = h$ con $h \in]-\infty, +\infty[$

(le altre 2 intersezioni “vanno all'infinito”),

Introducendo i punti impropri si può affermare che la curva incontra la retta impropria in 2 punti

- Il punto improprio dell'asse x con molteplicità uguale a 1 (punto semplice)
- Il punto improprio dell'asse y con molteplicità uguale a 2 (punto doppio)

b) Studio della curva in coordinate omogenee (x, y, z) : $yx^2 + 4yz^2 - 8z^3 = 0$

Le intersezioni con la retta impropria $z = 0$ sono $X_\infty(1, 0, 0)$ con molteplicità uguale a 1 e $Y_\infty(0, 1, 0)$ con molteplicità uguale a 2

Intersezioni tra la generica retta passante per X_∞ , di equazione $y = k z$, e la curva

$$\begin{cases} y = kz \\ yx^2 + 4yz^2 - 8z^3 = 0 \end{cases} \rightarrow kzx^2 = (8 - 4k)z^3 \rightarrow$$

Una soluzione è $X_\infty(1,0,0)$, le altre due risolvono l'equazione $kx^2 = (8 - 4k)z^2$

Se $k = 2$ due delle 3 soluzioni confluiscono nel punto $(0,2,1)$ (punto di tangenza)

Se $k = 0$ le 3 soluzioni confluiscono in $X_\infty(1,0,0)$ (punto di tangenza)

Intersezioni tra la generica retta passante per Y_∞ , di equazione $x = k z$, e la curva

$$\begin{cases} x = kz \\ yx^2 + 4yz^2 - 8z^3 = 0 \end{cases} \rightarrow (4 + h^2)yz^2 = 8z^3 \rightarrow$$

Se $(4 + h^2) \neq 0$ due delle 3 soluzioni confluiscono nel punto $Y_\infty(0,1,0)$, la terza è $\left(kz, \frac{8z}{4+h^2}, 1\right)$

Se $(4 + h^2) = 0$ le 3 soluzioni confluiscono in $Y_\infty(0,1,0)$, in corrispondenza di valori complessi e coniugati del parametro k : Y_∞ è un nodo con tangenti immaginarie

3. RIFLESSIONE /DISCUSSIONE

Commentare la seguente osservazione del matematico J. L. Lagrange, Leçons Élémentaires Sur Les Mathématiques, 1795

<< Finché l'algebra e la geometria procedettero su sentieri separati, il loro progresso fu lento e le loro applicazioni limitate. Ma quando queste scienze si unirono, trassero l'una dall'altra nuova vitalità e da allora in poi procedettero con passo rapido verso la perfezione.>>

