Paolo Ruffini

di Antonino Giambò

1. Oso affermare, pur con il rischio di essere clamorosamente smentito, che ogni studente liceale conosce la *regola di Ruffini*, relativa alla divisione di un polinomio in una indeterminata per un binomio di 1° grado nella stessa indeterminata. Ma forse non tutti gli studenti liceali sanno chi era Ruffini.

Ebbene, in questo articolo mi propongo di permettere loro, se lo desiderano, di colmare questa lacuna.

figura 1 - Paolo Ruffini

2. Paolo Ruffini, più esattamente Paolo Giovanni Pacifico Giacinto Bonaventura Ruffini, nacque il 22 settembre 1765 a Valentano, un piccolo centro del Lazio, situato in provincia di Viterbo, nei pressi del lago di Bolsena, quasi al confine con la Toscana e l'Umbria, all'epoca facente parte dello Stato Pontificio. Il padre, Basilio Ruffini era un medico, originario di Reggio Emilia, e si era trasferito temporaneamente a Valentano per motivi di lavoro; la madre, Maria Francesca Ippoliti, era invece nativa di una cittadina del Lazio. Quando era ancora adolescente, nel 1771, la famiglia fece ritorno a Reggio Emilia, ma poco tempo dopo Paolo si trasferì a Modena, dove trascorse il resto della sua vita, rifiutando, come vedremo più avanti, importanti impieghi in altre città.

Da ragazzo era convinto che sarebbe diventato prete di Santa Romana Chiesa, ma poi abbandonò quest'idea. Egli, tuttavia, non tralasciò mai le pratiche religiose, anche quando era molto impegnato.

Nel 1783 si iscrisse all'Università di Modena. Nel biennio propedeutico ebbe modo di studiare le discipline fisico-matematiche, alle quali finì per appassionarsi. Dopo il biennio, intraprese gli studi di Medicina.

Ottenne la laurea in Filosofia e Medicina nel 1788.

Riguardo ad una sua presunta laurea in Matematica, c'è chi sostiene che l'abbia conseguita, c'è invece chi smentisce ciò, affermando che la notizia è priva di fondamento [1].

Comunque sia, Ruffini, con o senza laurea, diventò apprezzato professore di Matematica. Vediamo come.

Uno dei suoi maestri, il principale, fu l'analista Paolo Cassiani (1743-1806), che ricopriva la cattedra di "Istituzioni analitiche" (insegnamento di "Calcolo Sublime" ovvero Analisi Matematica), insegnamento che a Modena veniva istituito per la prima volta. Cassiani stimava Ruffini a tal punto che ne promosse con successo la nomina a suo sostituto quando, nel 1787, dovette rinunciare all'insegnamento perché era stato nominato dagli Estensi, signori del Ducato di Modena e Reggio, Ministro del Supremo Consiglio di economia e Sovrintendente delle acque e strade.

Fu così che Ruffini, ancora studente, iniziò la sua carriera di insegnante di Matematica. Dopo che nel 1798 l'incarico gli fu confermato, esercitò praticamente per il resto della sua vita la professione di insegnante di Matematica, salvo una breve interruzione di cui diremo fra poco. Intanto, va precisato che tenne l'insegnamento ereditato da Cassiani fino al 1796.

Un altro maestro di Ruffini fu il geometra Luigi Fantini e quando questi, nel 1791, si ritirò dall'insegnamento perché anziano e cieco, Ruffini lo sostituì essendogli stata affidata anche la cattedra di "Elementi di Matematica".

Dal 1797 e fino al 1802 insegnò anche "Geometria e Analisi", sempre all'Università di Modena.

Riprese l'insegnamento di "Matematica sublime" nel 1803 e fino al 1806, non più all'Università, che la dominazione napoleonica aveva declassato a Liceo Dipartimentale, ma in questo Liceo.

Nel 1807, dopo aver abbandonato la cattedra di Analisi Matematica, passò ad insegnare "Matematica Applicata" ("Idrodinamica"), dapprima alla Scuola di Artiglieria e Genio dell'Accademia Militare istituita dal Governo napoleonico e in seguito, dal 1814, dopo la caduta di Napoleone, di nuovo all'Università.

Insomma, si può dire che l'insegnamento matematico di Ruffini ricoprì tutto ciò che alla sua epoca era noto in questo settore.

E veniamo all'interruzione su accennata. Ruffini era un osservante scrupoloso della religione cattolica e quando, nel 1798, gli fu imposto di prestare giuramento alla Repubblica Cisalpina, alla quale era stato annesso il Ducato di Modena, egli si rifiutò e per questo fu destituito dall'insegnamento. Ma già l'anno dopo fu reintegrato in entrambe le cattedre che ricopriva prima della destituzione.

Contemporaneamente all'insegnamento, Ruffini esercitò, a partire dal 1791, anche la professione di medico, che in realtà era la sua principale professione, e lo fece sempre con grande scrupolo, dedicando tutto il tempo necessario, e anche di più, alle visite agli ammalati.

Dopo la caduta di Napoleone, avvenuta nel 1814, una volta restaurato il Ducato di Modena, vi s'insediò Francesco Giuseppe Carlo Ambrogio Stanislao d'Austria-Este (più brevemente Francesco IV), che decretò la riapertura dell'Università e Ruffini fu nominato professore di Medicina Pratica e Clinica Medica e divenne inoltre Rettore della stessa Università. Come già detto, continuò comunque ad insegnare "Matematica Applicata".

Nel 1816 fu nominato presidente della Società dei XL (com'era denominata allora l'Accademia Nazionale delle Scienze), detta così in omaggio ai 40 più illustri scienziati "italiani" dell'epoca, e conservò quella carica finché fu in vita.

Nel 1817 scoppiò un'epidemia di tifo nel Ducato di Modena e Ruffini, che imperterrito continuò ad occuparsi degli ammalati, finì per ammalarsi egli stesso e qualche anno dopo, non essendosi ripreso completamente dalla malattia, si vide costretto a dimettersi dai suoi incarichi all'Università.

Morì a Modena il 10 maggio 1822.

Dicevamo di importanti incarichi lontano da Modena che Ruffini rifiutò adducendo scuse varie. In particolare, nel 1797 rifiutò un incarico a Milano, nel Consiglio degli Juniori del Corpo legislativo e, parimenti, nel 1802 rifiutò di trasferirsi alla prestigiosa Università di Pavia dove gli era stata offerta la cattedra di "Calcolo Sublime".

3. All'attività didattica di Ruffini, com'è stata delineata nelle righe precedenti, bisogna aggiungere la pubblicazione di alcune opere interessanti, ma si tratta di un elenco parziale:

- *Riflessioni intorno alla rettificazione ed alla quadratura del circolo* (1802);
- *Alcune proprietà generali delle funzioni* (1807);
- *Algebra e sua Appendice* (1807/1808);
- *Di un nuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche* (1813);
- *Della classificazione delle curve algebriche a semplice curvatura* (1820);
- *Alcune proprietà delle radici dell'unità* (pubblicato postumo nel 1824).

Accantonando l'interesse e il contributo di Ruffini alle questioni filosofiche ed epistemologiche, che qui non ci interessano, andiamo adesso ad occuparci di due questioni che lo videro fortemente impegnato e che, assieme alle opere su elencate, ma forse anche da sole, fanno di Ruffini un eccellente matematico.

Si tratta delle due questioni che, più di tutte, lo hanno reso celebre, benché *post mortem*: "la risoluzione delle equazioni algebriche" e un "metodo di approssimazione delle radici di un'equazione". Trattando della seconda questione, descrive e applica quella che sarebbe diventata la celebre "regola di Ruffini".

4. Gli Egizi, circa 2.000 anni prima di Cristo, erano in grado di risolvere equazioni di primo grado in un'incognita. Nello stesso periodo i Babilonesi risolvevano equazioni di 2° grado. Si trattava invero di metodi rudimentali, che si andarono perfezionando col tempo, soprattutto per merito degli Indiani (VII sec. d.C.), dai quali li ripresero gli Arabi (IX secolo). Da questi ultimi la risoluzione delle equazioni dei primi due gradi passò

in Occidente fin dai primi anni del XIII secolo (Fibonacci). Perfezionamenti successivi portarono alle regole di risoluzione che oggi conosciamo.

Nel Cinquecento, un gruppo di studiosi, i cosiddetti "algebristi bolognesi", riuscirono a risolvere le equazioni di 3° e 4° grado.

Lo studio e la risoluzione delle equazioni algebriche dei primi quattro gradi sono compendiati in un capitolo di un'opera magistrale, l'*Algebra* di Rafael Bombelli (1526-1572), pubblicata a stampa nell'anno della sua morte. Non è ancora l'algebra simbolica di cui disponiamo, giacché tutto è espresso a parole (algebra retorica) o al più con qualche simbolo rudimentale (algebra sincopata). Bisogna aspettare qualche anno perché si affermasse, nel 1637 con Cartesio (1596-1650), quel simbolismo che, a parte qualche dettaglio, usiamo ancora oggi.

Una volta risolte le equazioni dei primi quattro gradi, gli studiosi si misero alla ricerca di una soluzione per l'equazione algebrica generale di 5° grado. E non avevano dubbi che prima o poi sarebbero riusciti nell'intento. Si tratta soltanto di tempo, sostenevano i più ottimisti. Ma gli anni passavano e non si vedevano risultati.

Fino a che il matematico italo-francese Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) dimostrò che certi metodi, da lui trovati, buoni per le equazioni di 3° e 4° grado non funzionavano per risolvere per radicali le equazioni algebriche di 5° grado. Ma non si pronunciò sulla impossibilità o meno di risolvere queste equazioni, eventualmente con altri metodi.

Fu a questo punto che entrò in scena Ruffini. Egli aveva potuto leggere l'opera *Réflection sur la résolution algébrique des équations* (1770), nella quale Lagrange aveva esposto le sue considerazioni ed ebbe modo così di meditare sugli aspetti più interessanti. Le sue riflessioni lo portarono a pubblicare, nel 1799 a Bologna, un'opera, in 2 volumi (in figura 1 la copertina del primo volume), dal lungo titolo *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*. In essa dimostrava per l'appunto che, a differenza delle equazioni dei primi quattro gradi, un'equazione generale di grado superiore non è risolubile per radicali.

TEORIA GENERALE
DELLE
EQUAZIONI,
IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE
LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE
EQUAZIONI GENERALI DI GRADO
SUPERIORE AL QUARTO
DI
PAOLO RUFFINI.
PARTE PRIMA.
BOLOGNA MDCCXCVIIII.
NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.

figura 2

Insomma, mentre esistono formule algebriche per le soluzioni delle equazioni algebriche dei primi quattro gradi, non ne esistono per le equazioni di grado superiore.

Una volta pubblicata, Ruffini inviò l'opera a vari matematici italiani, i quali, a parte qualche eccezione, la valutarono con interesse. Ma fuori dell'Italia non era praticamente presa in considerazione. O era considerata con scetticismo.

Nel 1802 Ruffini ne inviò copia a Lagrange e, non avendo ottenuto risposta, ci riprovò con un secondo invio, ma ancora senza risposta.

Insomma, la dimostrazione di Ruffini, che purtroppo conteneva dei punti oscuri – cinque per la precisione, ma uno solo veramente importante [3, pag. 474] – ed era difficile da comprendere per le novità che introduceva, non fu accettata dai matematici fuori dell'Italia. Egli pubblicò altre quattro edizioni rivedute e corrette; l'ultima, pubblicata nel 1813, porta il titolo *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali*.

Solo diversi anni dopo, il 20 settembre 1821, a meno di un anno dalla sua morte, quando già era stanco ed ammalato, ricevette una lettera da Augustin Louis Cauchy (1789-1857), con la quale il grande matematico francese riconosceva che Ruffini aveva effettivamente dimostrato l'insolubilità per radicali di un'equazione algebrica di grado maggiore del quarto. Ecco cosa gli scrive Cauchy:

« *Signore, ho ricevuto la Vostra gentile lettera che avete fatto l'onore di scrivermi e mi affretto a risponderVi. […]. La Vostra memoria sulla risoluzione generale delle equazioni è un lavoro che mi è sempre parso degno di fissare l'attenzione dei geometri e che, a mio avviso, dimostra completamente l'insolubilità algebrica delle equazioni generali di grado maggiore al quarto*. » [3, pag. 450]

Nonostante questa lettera, che avrebbe dovuto chiudere ogni discussione, bisognerà aspettare ancora parecchio tempo, 70 anni per l'esattezza, perché a Ruffini venisse riconosciuto quel merito che allora era tributato soltanto al giovane e sfortunato matematico norvegese Niels Henrik Abel (1802-1829), il quale, nel 1824, pure aveva dimostrato il teorema sulla insolubilità per radicali di un'equazione algebrica generale di grado superiore al quarto.

Teorema che ai nostri giorni è universalmente e giustamente denominato teorema di Ruffini-Abel. [1]

Chi ha riscoperto i risultati di Ruffini è stato uno straniero, il tedesco Heinrich Burkhardt (1861-1914), autore di un'opera in cui si riconoscono i suoi meriti riguardo alla risoluzione delle equazioni: *Die Anfange der Gruppentheorie und Paolo Ruffini* (1892) (*Gli inizi della teoria dei gruppi e Paolo Ruffini*).

5. Accenniamo adesso ad un'altra questione.

Data un'equazione algebrica di 5° grado, con coefficienti numerici (equazione numerica), $P_5(x)=0$, si possono presentare due situazioni: 1) è nota una radice dell'equazione, 2) non è conosciuta alcuna radice dell'equazione. Esaminiamo i due casi.

1) Se è nota una radice dell'equazione, mettiamo $x=a$, l'equazione può essere messa nella forma seguente:

$$P_4(x) \cdot (x - a) = 0 ,$$

dove $P_4(x)$ è il polinomio quoziente della divisione di $P_5(x)$ per $x-a$. Questo permette di esprimere per radicali tutte le radici dell'equazione, essendo possibile farlo per l'equazione $P_4(x)=0$.

Si capisce che il procedimento si può estendere a equazioni numeriche di grado $n>5$, a condizione che siano note $n-4$ radici dell'equazione. Ma vale anche per equazioni di grado inferiore a 4.

2) Se non è conosciuta alcuna radice dell'equazione, tutto quello che si può fare è trovarne delle radici approssimate.

Ebbene, Ruffini lo fece, inventando un procedimento di approssimazione, che migliorava quello che qualche tempo prima aveva proposto Lagrange. Ne rende conto nell'opera *Sopra la determinazione delle radici delle equazioni numeriche di qualunque grado* (1804).

Per applicare questo suo metodo di approssimazione, Ruffini inventa un algoritmo che gli permette di trovare rapidamente i coefficienti e il resto della divisione di un polinomio qualsiasi $P(x)$ per il binomio $x-a$, essendo a un numero assegnato. Nasce la celebre ***regola di Ruffini***.

In realtà, Ruffini ha bisogno di eseguire tutta una serie di divisioni successive e deve utilizzare ripetutamente la sua regola. Lo vediamo con un esempio, proposto dallo stesso Ruffini, nel quale si chiede di trovare l'unica radice reale dell'equazione [1, pag. 236]:

$$x^3 - 2x - 5 = 0 .$$

[1] A chi volesse saperne di più su tutta questa faccenda suggerisco la lettura di [1] e [3].

Una volta stabilito che questa radice è compresa fra 2 e 3, per cui essa è un numero decimale la cui parte intera è 2, Ruffini ha bisogno di dividere ripetutamente il polinomio per il binomio $x-2$. Ecco il suo schema di calcolo:

		2		
1	0	-2	-5	
	1	2	2	-1
		1	4	10
			1	6
				1

Si può notare che, rispetto al modo attuale di rappresentare le divisioni successive, ci sono alcune differenze: anzitutto il numero 2 è posto in alto e inoltre sono saltati dei passaggi intermedi. Il nostro modo di rappresentare la situazione chiarisce meglio quanto detto:

	1	0	-2	-5
2		2	4	4
	1	2	2	-1
2		2	8	
	1	4	10	
2		2		
	1	6		

Per la cronaca, entrambi gli schemi raccontano quanto segue:

$$x^3 - 2x - 5 = (x-2)\cdot(x^2+2x+2) - 1, \qquad x^2 + 2x + 2 = (x-2)\cdot(x+4) + 10\,,$$
$$x + 4 = (x-2)\cdot 1 + 6\,.$$

Per completare il discorso su questo argomento, è opportuno accennare al cosiddetto "teorema del resto".

Se $P(x)$ è un polinomio nell'indeterminata x e si richiede di dividerlo per il binomio $x-a$, si perviene alla seguente relazione:

$$P(x) = (x-a)\cdot Q(x) + R\,,$$

dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione e R il resto. Si desume da essa che $P(a)=R$. Ecco allora il teorema:

Teorema del resto. Il resto della divisione del polinomio $P(x)$ per il binomio $x-a$ è uguale a $P(a)$.

Da questo teorema segue poi facilmente quello che comunemente è denominato "teorema di Ruffini".

Teorema di Ruffini. Un polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $x-a$ se e solo se $P(a)=0$.

Ritornando al procedimento di approssimazione delle radici di un'equazione (che però non approfondiamo, rimandando chi ne fosse interessato alla lettura di [1]), bisogna dire che la memoria di Ruffini sull'argomento fu ritenuta, nel 1804, il lavoro migliore in un concorso che era stato bandito nel 1802 dalla Società Italiana delle Scienze.

Nonostante ciò, il metodo di approssimazione di Ruffini rimase praticamente sconosciuto, soprattutto fuori dell'Italia. Tant'è vero che quando il matematico inglese William George Horner (1796-1837) pubblicò nel 1819 un lavoro analogo a quello di Ruffini (un altro lo avrebbe pubblicato nel 1830), questo metodo fu denominato "metodo di Horner".

La solita storia e la solita fregatura per Ruffini.

Solo nel 1911 i suoi meriti furono riconosciuti ed a farlo fu ancora uno straniero, l'americano di origini svizzere Florian Cajori (1859-1930), matematico e storico della matematica. Ciò che scrive Cajori, concludendo un articolato e convincente ragionamento, si può leggere nella pagina sottostante [(2)], ma per comodità del lettore riproduco qui il passo che ci interessa:

« Nel 1804 Ruffini elaborò il "metodo di Horner" per approssimare le radici delle equazioni numeriche con una chiarezza ed una profondità nemmeno superata dall'esposizione originale fattane da Horner nel 1819. In considerazione di questo fatto, non è giustizia storica richiedere che il metodo di Ruffini sia associato a quello di Horner nella designazione di quel metodo? Perché non chiamarlo "metodo di Ruffini-Horner" ? »

---

[2] Floian Cajori, *Paolo Ruffini ed il così detto "Metodo di Horner"*, in Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, 1911, pagg. 81-86. È reperibile in Internet.

Sì, è giusto denominarlo così. Ed è quello che oggigiorno si fa.

86 BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA

sale da sinistra verso destra. Non è evidente che una delle due disposizioni possegga una spiccata superiorità sull'altra. A pagine 77-79 Ruffini calcola con otto decimali la radice reale della equazione cubica di Newton $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Nel 1804 Ruffini elaborò il « metodo di Horner » per approssimare le radici delle equazioni numeriche con una chiarezza ed una profondità nemmeno superata dall'esposizione originale fattane da Horner nel 1819. In considerazione di questo fatto, non è giustizia storica richiedere che il nome di Ruffini sia associato a quello di Horner nella designazione di quel metodo? Perchè non chiamarlo « metodo di Ruffini-Horner »?

Va anche notato qui che Budan, nella sua celebre memoria del 1807 (1), espose un procedimento per trasformare un'equazione in altra le cui radici fossero minori di h delle radici della data, il quale offre qualche somiglianza con quello Ruffini e Horner. Quando h = 1, il calcolo è identico. Ma se p. e., h = 8, vi è una differenza: Budan raggiunge lo scopo con otto passaggi, diminuendo le radici di un'unità per volta. Riguardo a Budan, Ruffini scrisse una volta a Delambre, segretario perpetuo dello Istituto di Francia (2).

« Troppo giuste sono le lodi che Ella dà al metodo del Sig. Budan di sciogliere le Equ. numeriche; avrei però desiderato che avesse Ella avuta occasione di vedere la Memoria che sopra lo stesso argomento presentai già alla nostra Società Italiana, che da essa riportò graziosamente il premio e che poi fu stampata nel 1804 fuori degli Atti. Coincido col Sig. Budan nella maniera di fare le trasformazioni successive e nel servirmi dei decimali ».

(1) F. D. Budan, *Nouvelle méthode pour la résolution des equations numériques* (Paris, 1807) pp. 14, 15, 29, 39.

(2) *Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)*, Serie III, Tomo XIV, 1906, p. 296.

figura 3

Il 10 maggio 2022, per commemorare Ruffini nel bicentenario della sua morte, le Poste Italiane hanno emesso un francobollo (figura 4), che riproduce, oltre all'immagine del medico e matematico, la sua celebre regola, nello schema attuale.

figura 4

BIBLIOGRAFIA.

[1] Francesco Barbieri – Franca Cattelani Degani, *Paolo Ruffini (1765-1822)*, in Matematica, Cultura e Società, Rivista dell'U.M.I., N° 3/2022. È reperibile anche in Internet.

[2] Dirk J. Struik, *Matematica: un profilo storico*, con traduzione e un'appendice di Umberto Bottazzini, Universale Paperbacks il Mulino, Bologna, 1981, pagg. 252-256.

[3] Silvio Maracchia, *Storia dell'Algebra*, Liguori Editore, Napoli, 2005, cap. 9.